IV. Cardinal et applications entre ensembles finis

IV.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 16.15 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

- $E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$ forme une partition de E car $\asymp$: $(x, x') \in E^2 \mapsto x \asymp x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence (laissé en exercice).
  Donc $\operatorname{Card} E = \sum_{y \in f(E)} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) \geqslant \sum_{y \in f(E)} 1 = \operatorname{Card} f(E)$ d'après la proposition 16.12
  avec égalité si et seulement si $\forall y \in f(E), \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si f injective.
- Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ d'après le point précédent.
- Supposons f injective. Alors d'après le premier point, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$ d'après la proposition 16.10.
- Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ donc $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Théorème 16.16 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
(f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective) $\Leftrightarrow$ (f bijective).

Démonstration

- Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.
- Supposons f injective. Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$ d'après la proposition 16.10. Donc f est surjective.
- Supposons f surjective. Alors $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ donc f est injective d'après le théorème précédent.

Important !
Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 16.15 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 16.7 (Cor.) Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

IV.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 16.15 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 16.8 (Cor.) Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

IV.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 16.17

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Numérotons les éléments x_i de E avec $i \in [\![1; n]\!]$.
Définir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, ***c'est donner, pour chaque*** $x_i \in E$, ***la valeur de*** $u(x_i) \in F$.
Autrement dit, choisir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, c'est :

- choisir $u(x_1) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles ;
- ***PUIS*** choisir $u(x_2) \in F$: il y a p choix possibles ;

  ...
- ***PUIS*** choisir $u(x_n) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles.

Donc $\operatorname{Card}\mathcal{F}(E,F) = p^n = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}E}$.

Remarque

En notant $n = \operatorname{Card}E$, ***il y a donc autant*** d'applications dans $\mathcal{F}(E,F)$ que de n-uplets dans F^n.
C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi noté F^E.

IV.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 16.18

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

D'après la propriété 16.4, $\Phi : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \Phi(A) = \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(E,\{0;1\})$ est bijective donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E,\{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.
Autrement dit, ***choisir une partie*** A ***de*** E***, c'est choisir une application*** u ***de*** E ***dans*** $\{0;1\}$ ***telle que*** $u(x) = 1$ ***si*** $x \in A$ ***et*** $u(x) = 0$ ***si*** $x \notin A$***.***
Il y a donc autant de parties de E ***que d'applications de*** E ***dans*** $\{0;1\}$***.***
Donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E,\{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.

V. Listes

V.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 16.19

Soit E un ensemble et p un entier.
p-liste d'éléments de E, ***p-uplet d'éléments de*** E et ***famille de*** p ***éléments de*** E sont des synonymes.
On appelle ***p-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall(i;j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.
Plus simplement, ce sont les listes ***de*** p ***éléments de*** E***, sans répétition possible d'un même élément***.

Théorème 16.20

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

•Si $p > n$, le principe de Dirichlet nous permet d'affirmer qu'au moins deux éléments de la liste seront égaux : $A_n^p = 0$.

•Si $p \leq n$, on fait une démonstration par ***récurrence finie*** sur p.

Initialisation : si $p = 0$, la liste vide convient donc $A_n^0 = 1$.

Si $p = 1$, toute liste de 1 élément de E convient donc $A_n^1 = n$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang p ***strictement inférieur à*** n et démontrons-la au rang $p+1 \leq n$. On a donc $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Il y a autant de façons de choisir une liste à $p+1$ éléments distincts que de façons de choisir ses p premiers éléments puis le $p+1^{\text{ème}}$distinct des p premiers.

Donc $A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p) = \dfrac{n! \times (n-p)}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!} = \dfrac{n!}{[n-(p+1)]!}$.

Conclusion : la propriété est initialisée en $p = 0$ et héréditaire tant que $p+1 \leq n$, elle est donc vraie pour tout $p \in [\![0; n]\!]$.

V.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 16.21

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$.
Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

Il suffit de remarquer que définir une injection c'est donner la liste de ses images ***distinctes*** (puisqu'il s'agit d'une injection). Il y a donc autant d'injections de F dans E que de $\operatorname{Card} F$-listes d'éléments distincts de E.

V.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 16.22

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Les deux ensembles ont même cardinal donc toute injection est bijective. Donc le nombre de bijections est égale au nombre d'injections et vaut
$A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{1} = n!$.

Définition 16.23

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
L'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.
Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 16.9 (Cor.) Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

VI. Combinaisons

VI.1. Définition

Définition 16.24

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

VI.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 16.25

Pour $\operatorname{Card} E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Si $p = 0$, le seul sous-ensemble de E à 0 élément est $\emptyset$ et $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.
Sinon, choisir une injection de $[\![1; p]\!]$ dans E consiste à choisir son image $A \subset E$ ***PUIS*** à choisir une bijection de $[\![1; p]\!]$ dans A.
On applique alors le principe multiplicatif :
•il y a $p!$ bijections de $[\![1; p]\!]$ dans A ;

•il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ combinaisons A de p éléments de E ;

•il y a donc $p! \times \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = A_n^p$ injections de $[\![1;p]\!]$ dans E.

Donc $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments de E.

Propriété 16.26

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1;n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

On partitionne l'ensemble des combinaisons de p éléments de E en celles comprenant un élément $x_0 \in E$ fixé, et celles ne comprenant pas x_0. On utilise alors la proposition 16.12.

Corollaire 16.27

$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Il suffit de remarquer que la relation $\asymp$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \asymp B \Leftrightarrow \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$ est une relation d'équivalence. Elle partitionne donc $\mathcal{P}(E)$ comme réunion des combinaisons de p éléments avec $p \in [\![0;n]\!]$.

Ex. 16.10 (Cor.) On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 16.11 Dénombrement des mains de poker
Dénombrer l'ensemble de toutes les mains de 5 cartes choisies parmi 52, l'ensemble des mains comportant une unique paire, comportant deux paires, comportant un brelan, etc...On rappelle que :

- une ***quinte flush*** est constituée de 5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent. Remarque : l'As est considéré ***à la fois*** comme la plus petite et la plus grande hauteur de carte.
- un ***carré*** est constitué de 4 cartes de même hauteur et d'une cinquième carte quelconque.
- un ***full*** est constitué de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première).
- une ***couleur*** est constituée de 5 cartes de même hauteur ***dont les hauteurs ne se suivant pas***.

- une ***suite*** est constituée de 5 cartes dont les hauteurs se suivent ***mais ne sont pas de la même couleur***.
- un ***brelan*** est constitué de 3 cartes de même hauteur, et de deux autres cartes ***qui ne forment ni carré ni full***.
- une ***double-paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première) et d'une cinquième carte de hauteur différente.
- une ***paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, et de trois autres cartes quelconques ***qui ne forment aucune des mains ci-dessus***.