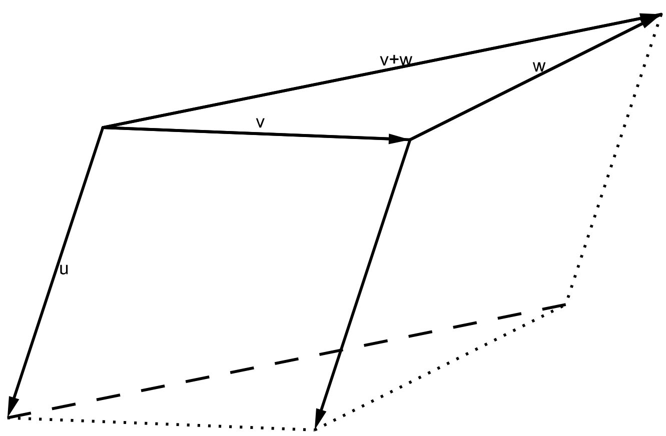
Maths - Chapitre 21

Déterminant

<u>**Ex.** 21.1</u> Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_1$ et $BCEF$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_2$. Quelles sont les valeurs possibles de l'aire du parallélogramme $AFED$?

La notion de déterminant est une généralisation des notions d'aire et de volume. Comme dans les précédents chapitres d'algèbre, nous allons le définir ***par ses propriétés opératoires***. Il est cependant important de comprendre que ces propriétés résultent de l'origine géométrique de cette notion. Pour comprendre cela, intéressons-nous à la notion d'aire.

Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de E. Notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire ***algébrique*** (c'est-à-dire que cette aire peut-être positive ou négative) du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.



- ***L'aire est bilinéaire***
  $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$: le parallélogramme formé sur les vecteurs u et $v + w$ a pour aire la somme des aires des parallélogrammes formés sur les vecteurs u et v d'une part et u et w d'autre part
  $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$: on retrouve ici que l'aire envisagée ici doit être algébrique
- ***L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle*** : $\mathcal{A}(u, u) = 0$
- ***Ceci a pour conséquence que l'aire est antisymétrique*** :
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) = 0$ d'une part et
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) = \mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(v, v) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u)$ d'autre part, d'où l'on déduit que
  $\mathcal{A}(u, v) = -\mathcal{A}(v, u)$

Le but de ce chapitre est de montrer que cette notion, si on l'envisage comme nous venons de le faire au travers de ses propriétés opératoires, se généralise non seulement aux calculs de

volumes de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais aussi aux ***espaces de dimensions supérieures*** : c'est la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Nous verrons ensuite les propriétés opératoires de cette notion, conduisant notamment à un certain nombre de méthodes de calcul pour le déterminant d'une matrice carrée. Enfin, nous verrons que cette notion se généralise davantage encore en définissant le déterminant des endomorphismes en dimension finie.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Déterminant

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée de taille n	
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : • f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; • f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; • $f(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors-programme. On motivera géométriquement cette définition pour $n \in \{2;3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice carrée A.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.	
Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Application : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.	La formule de changement de bases est hors-programme.
Caractérisation des bases.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes et des colonnes.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. Comatrice hors-programme.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Traduction pour les déterminants d'endomorphisme des propriétés vues pour le déterminant d'une matrice.	

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

II.1. Théorème-définition

Théorème 21.1

Il existe une ***unique*** application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à ***chaque colonne de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|\lambda C_i + \mu C_i'|...|C_n\right) = \lambda f\left(C_1|..|C_i|...|C_n\right) + \mu f\left(C_1|..|C_i'|...|C_n\right)$
- f est antisymétrique (ou encore alterné) par rapport aux ***colonnes de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -f\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right)$
- $f(I_n) = 1$

Démonstration hors programme

Notation

Cette application est notée det.

Remarque

La dernière condition revient en fait à se donner une unité d'aire (pour les matrices 2×2), de volume (pour les matrices 3×3) ou d'***hyper-volume*** pour les matrices carrées quelconques.

II.2. Propriétés

Propriété 21.2

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration

Supposons que les colonnes C_i et C_j $(i \neq j)$ sont égales.
Alors $\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -\det\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right) = -\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right)$ puisque les deux xolonnes sont égales.
Donc $2\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = 0$, c'est-à-dire $\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = 0$.

Corollaire 21.3

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Démonstration

Supposons que la colonne C_i soit nulle : $C_i = 0_{n,1}$.
Soit C une matrice colonne quelconque : $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors :
$\det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \det(C_1|..|C - C|...|C_n)$ puisque $C_i = 0_{n,1}$.
Donc $\det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \det(C_1|..|C|...|C_n) - \det(C_1|..|C|...|C_n) = 0$ par linéarité.

Propriété 21.4

Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration

Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.
$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1|..|\lambda C_i|...|\lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \lambda^n \det(A)$ par linéarité.

Propriété 21.5

Ajouter à une colonne d'une matrice ***une combinaison linéaire des autres colonnes*** ne change pas la valeur de son déterminant.

Démonstration

On le montre pour la première colonne.
$\det(C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_n C_n|...|C_i|...|C_n) = \det(C_1|...|C_i|...|C_n) + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(C_i|...|C_i|...|C_n)$.
Or tous les déterminants intervenant dans la dernière somme sont nuls puisque deux de leurs colonnes sont identiques.
Donc $\det(C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_n C_n|...|C_i|...|C_n) = \det(C_1|...|C_i|...|C_n)$.

Ex. 21.2 (Cor.) Calculer les déterminants suivants :
$A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$