Corollaire 21.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

On le démontre par récurrence :

Initialisation : si $n = 1$

$\det(a) = a\det(1) = a$ est bien égal au produit du (seul !) coefficient diagonal de la matrice.

Comme ce cas n'est pas très parlant, on traite aussi le cas où $n = 2$.

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ par linéarité par rapport à la première colonne.

Donc $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ en effectuant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - bC_1$ qui laisse le déterminant inchangé d'après la propriété 21.5.

Enfin, à nouveau par linéarité, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = ac\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ac$ car $\det(I_2) = 1$ par définition.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné et que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (la démonstration est similaire pour les matrices triangulaires inférieures).

$\det(A) = a_{1,1}\det\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ en effectuant les combinaisons linéaires $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1$ qui laissent le déterminant inchangé.

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Ex. 21.3 (Cor.)

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2|C_2 - C_3|...|C_{n-1} - C_n|C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

II.3. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;

4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$;
8) $\mathrm{rg}(A) = n$;
9) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

II.4. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 21.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre.
Pour démontrer la propriété il suffit donc de démontrer que

1) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est libre alors $\det(A) \neq 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ libre, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = n$.
Alors l'algorithme du pivot de Gauss - sur les colonnes de A - appliqué à A conduit à une matrice diagonale possédant n pivots.
C'est-à-dire à une matrice diagonale dont aucun coefficient diagonal n'est nul.
Or les opérations élémentaires utilisées lors de l'algorithme du pivot de Gauss sont du type :
   - $C_i \leftrightarrow C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par -1 ;
   - $C_i \leftarrow \lambda C_i + \mu C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par $\lambda \neq 0$.

   Le déterminant de A est donc non nul (puisque produit de scalaires non nuls).
2) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est liée alors $\det(A) = 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ liée. L'un des vecteurs colonnes est donc combinaison linéaire des autres vecteurs, par exemple $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$.
Donc $\det(A) = \det\left(C_1|...|C_{n-1}|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i\right) = \det(C_1|...|C_{n-1}|0_{n,1}) = 0$ d'après la propriété 21.5.

Ex. 21.4

1) Calculer $\det\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.

2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\mathrm{Ker}(A_x)$ et $\mathrm{rg}(A_x)$.