II.5. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 21.8

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$*** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 21.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de la propriété précédente.
En effet, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si elle est libre (n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n).
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est de rang n, c'est-à-dire inversible.
Et le théorème précédent garantit que cette dernière propriété équivaut à $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

II.6. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 21.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Considérons les deux applications $\phi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(AB)$ et $\psi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)\det(B)$.
Ces deux applications sont linéaires par rapport à chacune des colonnes de la variable et antisymétriques. De plus, $\phi(I_n) = \psi(I_n) = \det(A)$.
Si A n'est pas inversible, AB non plus et $\phi = \psi$.
Sinon, par unicité du déterminant, on a encore $\phi = \psi = \det(A)\det$.

Corollaire 21.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $AA^{-1} = I_n$ donc $\det\left(AA^{-1}\right) = \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I_n) = 1$.
Donc $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

II.7. Déterminant de la transposée

Propriété 21.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Démonstration

On utilise la décomposition ER de A.
On a alors : $\det(A) = \det(ER) = \det(E)\det(R)$ et $\det\left({}^tA\right) = \det\left({}^tER\right) = \det\left({}^tR\right)\det\left({}^tE\right)$.
Si R n'est pas inversible, alors $\det\left({}^tA\right) = \det(A) = 0$.
Si R est inversible, alors c'est une matrice diagonale donc $R = {}^tR$ et $\det(R) = \det\left({}^tR\right)$.
Il suffit alors de vérifier que le déterminant des matrices d'opérations élémentaires est égal au déterminant de leur transposée (laissé en exercice).

Corollaire 21.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

II.8. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2 \\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 21.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Démonstration hors programme

Ex. 21.5 Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
2) Développement par rapport à la deuxième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
3) Développement par rapport à la troisième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
4) Développement par rapport aux lignes :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$ ....
5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant

le schéma $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 21.6 Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.

III. Déterminant d'un endomorphisme

III.1. Définition

Théorème 21.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors

$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 21.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

III.2. Propriétés

Propriété 21.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :
$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

__Ex.__ 21.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$.
Calculer $\det \psi$.

Corrections

Cor. 21.2 : Notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$A = \det(u, u+v) = \det(u,u) + \det(u,v) = 0 + 1$ car $\det(u,v) = \det(I_2) = 1$.
$B = \det(u + 3v, 2u + 4v) = \det(u + 3v, -2v)$ en effectuant $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$.
Donc $B = -2\det(u,v) - 6\det(v,v) = -2$.