Ex. 17.18 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.18

1) Par composition des limites, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est prolongeable par continuité par 0 en 0.
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée. De plus $\forall x \neq 0, f'(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ et $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (en écrivant $u = \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ si ce n'est pas clair). Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de dérivée 0.
3) La question précédente permet d'affirmer immédiatement que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$... on recommence !
$\tilde{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée
$\tilde{f}''(x) = \dfrac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - \dfrac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2)}{x^6}$ qui tend à nouveau vers 0 en 0 par croissance comparée. Donc $\tilde{f}'$ est dérivable en 0, de dérivée continue, donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 8 sur les suites, le chapitre 14 sur la continuité et le TD 6 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle*** I ***stable par*** f c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est décroissante***.

  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).

Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.

- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 8.51 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 14.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f. Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a; b]$ où a ***et*** b ***sont deux points fixes de*** f ***tels que*** $a < b$ est stable par f.
  En effet, $\forall x \in [a; b], a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b$.
- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- ***Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par*** f.

Méthode : Monotonie *de la suite*

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \mathrm{id}$:
  - ⋆ si g est ***positive sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est croissante ;
  - ⋆ si g est ***négative sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.

Les points fixes de f ***sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !***

Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.

De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 17.31) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».
Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.
Ex. 17.19 Nous avons déjà étudié (exercice 14.22, TD d'informatique) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$ et nous avons montré que

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.
En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

Cor. 17.19

Notons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{x + \frac{r}{x}}{2}$ de sorte à ce que $u_{n+1} = f(u_n)$.
On souhaite montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.
Remarquons tout d'abord que $f(\sqrt{r}) = \sqrt{r}$ de sorte à ce que cet encadrement se réécrit :

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant f(u_n) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$$

Comme on sait que u est décroissante à partir du rang 1 et converge vers $\sqrt{r}$, ceci revient à montrer que

$$\forall x \geqslant \sqrt{r}, 0 \leqslant f(x) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(x - \sqrt{r}\right)^2$$

Étudions f : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2}$. Donc
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant r \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{r}$ car $x > 0$.
Donc f est décroissante sur $\left]0; \sqrt{r}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{r}; +\infty\right[$.
Ceci permet d'affirmer immédiatement que $\forall x \geqslant \sqrt{r}, 0 \leqslant f(x) - f(\sqrt{r})$.
Il reste à démontrer la partie droite de l'encadrement.
On peut y voir une expression ressemblant à l'inégalité des accroissements finis.
Posons $a = \sqrt{r}$, $b = x$, sur le segment $\left[\sqrt{r}; x\right]$, f est continue et dérivable et sa dérivée $f'(u) = \dfrac{1 - \frac{r}{u^2}}{2}$ est croissante (car $u \mapsto \dfrac{-1}{u^2}$ est croissante). Donc f' est majorée par $f'(x) = \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
$f(x) - f(\sqrt{r}) \leqslant \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} \times \left(x - \sqrt{r}\right)$.
Or $\dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} \times \left(x - \sqrt{r}\right) = \dfrac{x^2 - r}{2x^2} \times \left(x - \sqrt{r}\right) = \dfrac{x + \sqrt{r}}{2x^2} \times \left(x - \sqrt{r}\right)^2$.
Il suffit donc de montrer que pour $x \geqslant \sqrt{r}$, $\dfrac{x + \sqrt{r}}{2x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}$.

Cette dernière inégalité est équivalente à $0 \leqslant x(x-\sqrt{r}) + x^2 - r \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x-\sqrt{r}\right)\left(2x+\sqrt{r}\right)$ qui est vraie.
On a donc bien démontré que

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant f(u_n) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$$

La fin est alors simple : $r > 1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{r}} < 1$ d'une part, et
si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près, alors $u_n - \sqrt{r} \leqslant 10^{-k}$ par définition.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant 1 \times \left(10^{-k}\right)^2$ ce qui garantit que u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

V.3. Fonctions lipschitziennes

Définition 17.37 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x;y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Proposition 17.38

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité 17.31 des accroissements finis.

Proposition 17.39

Si $I = [a;b]$ est un segment et si $f : I \to I$ est continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration

Existence : on l'a démontrée en TD. Elle vient de la continuité de f : on considère la fonction $g = f - \mathrm{id}$. g est continue et $g(a) = f(a) - a \geqslant a - a = 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f([a;b]) \subset [a;b]$ par hypothèses.
Donc g s'annule sur $[a;b]$.
Unicité : on la démontre par l'absurde. Supposons que f ait deux points fixes u et v dans $[a;b]$. On aurait alors :
$|f(u) - f(v)| = |u - v| \leqslant k|u-v| < |u-v|$ ce qui est absurde.

Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k-lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f.