VI. Correction des exercices

Cor. 18.1 :

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ et

  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et

  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = BA.$

  Les matrices A et B commutent donc.

Cor. 18.2 : Soit $u = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$.
Cherchons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 0$:
$f(u) = 2xi - 3xj + 3yi + yj - 4yk + 11zj - 8zk = (2x + 3y)i + (-3x + y + 11z)j + (-4y - 8z)k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & = & 0 \\ -3x + y + 11z & = & 0 \\ -4y - 8z & = & 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & = & 0 \\ 11y + 22z & = & 0 \\ -4y - 8z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 3z \\ y & = & -2z \end{cases}$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(3; -2; 1)$.
Le théorème 15.50 du rang permet d'affirmer que $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Par ailleurs, $f(i) \neq 0$ et $f(j)$ n'est pas colinéaire à $f(i)$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(i); f(j))$.

Cor. 18.3 :

1) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.
2) Soient P et Q deux polynômes de E, λ, μ deux réels.
   $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$.
   Donc ϕ est linéaire.
3) Soit $k \in [\![0; n]\!]$.
   $\phi(X^k) = (X + 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} X^i.$
   Notamment $\deg \phi(X^k) = k$.
4) L'image par ϕ de la base canonique est la famille $\mathcal{F} = \big(1; X + 1; (X + 1)^2; ...; (X + 1)^n\big)$ qui est une famille de $n + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Donc ϕ est bijective (elle envoie une base sur une base), linéaire, de E dans E : c'est un automorphisme de E.
5) Calculons $\phi(Q)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{n-k} X^k$.
   Remarquons que $Q = (X - 1)^n$.

Donc $\phi(Q) = (X+1-1)^n = X^n$.
On aurait aussi pu utiliser la linéarité de ϕ :
$\phi(Q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{n-k} \phi\left(X^k\right) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-k} X^i$
En utilisant ces deux expressions de $\phi(Q)$, on en déduit donc que :

- $\forall i \in [\![0; n-1]\!]$,
$$\sum_{k=i}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-k} = 0$$
- Pour $i = n$: $\sum_{k=n}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-k} = 1$.

Cor. 18.4 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.5 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ \vdots \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \right)_{i \in [\![1; n+1]\!]}$.

Cor. 18.6 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Cor. 18.7 : $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} n & (-1)^{n-2}(n-1) & & 1 & 0 \\ (-1)^n & (-1)^{n-1} & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $M = \left((-1)^{i+j} \begin{pmatrix} n+1-j \\ i-j \end{pmatrix} \right)_{\substack{i \in [\![1; n+1]\!] \\ j \in [\![1; n+1]\!]}}$ en posant $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = 0$ pour $k < 0$.
De plus $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$.
Donc les colonnes C_1, C_2, ..., C_{n+1} de M vérifient

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} C_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cor. 18.8 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(x; y; z) = (7x - y + 2z; -3x + y; 4x + 5y - 6z)$.

Cor. 18.9 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n \\ 0 & 0 & 1 & & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{\substack{i\leq n \\ j\leq n}}$.

Cor. 18.10 : $\phi_A(x; y) = (x + 2y; 3x + 4y; 5x + 6y) \in \mathbb{R}^3$.
C'est une application injective car $\phi_A(x; y) = (0; 0; 0) \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$ (système immédiat).
Enfin, le théorème du rang permet d'affirmer que $\operatorname{rg} \phi_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} \phi_A = 2$.

Cor. 18.11 : $\phi(1) = 0 \quad \phi(X) = 1 \quad \phi(X^2) = 2X$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$, il faut obtenir les coordonnées de $\phi(X) = 1$ et $\phi(X^2) = 2X$ dans $\mathcal{B}'$.
Soit $1 = aX(X - 1) + bX(X + 1) + c(X - 1)(X + 1)$.
En évaluant en -1, 0 et 1, on obtient $a = 1/2$, $b = 1/2$ et $c = -1$.
De même, on obtient $X = \frac{-1}{2}X(X - 1) + \frac{1}{2}X(X + 1) + 0 \times (X - 1)(X + 1)$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Enfin, de la même manière, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cor. 18.12 : $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Donc l'image du vecteur $(-2; 1)$ est $(0; -2; -4)$.

Cor. 18.13 : $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_E$: ce sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.
$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi) = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{i,j\in[\![1;n+1]\!]}$ par définition et
$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \left((-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1}\right)_{i,j\in[\![1;n+1]\!]}$.
Enfin $AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = I_{n+1}$ et
$BA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = I_{n+1}$.