Cor. 18.14 : • $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ car $(1;0) = 3(1;1) - (2;3)$ et $(0;1) = -2(1;1) + (2;3)$.

• $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car $X(X+1) = 0 + 1.X + 1.X^2$, $X(X+2) = 0 + 2.X + 1.X^2$ et $(X+1)(X+2) = 2 + 3.X + 1.X^2$.

Pour obtenir les autres matrices de passages, il faut obtenir de chaque base dans une autre base.
Par exemple, $1 = aX(X+1) + bX(X+2) + c(X+1)(X+2)$. On cherche $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$.
Pour cela on évalue en $X = 0$: $2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.
En $X = -1$: $b = -1$. Et en $X = -2$: $a = \frac{1}{2}$.
On fait de même pour X et X^2 et on obtient :

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

Donc $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour les matrices $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, on peut par exemple inverser les matrices $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

Cor. 18.15 : Dans la base $\mathcal{B}$, $P = 3X^2 + 5X - 4$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, $P = 3X^2 + 5X - 4$ a pour coordonnées $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De même, dans la base $\mathcal{B}''$, $P = 3X^2 + 5X - 4$ a pour coordonnées $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.16 : On obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -17 & -7 \end{pmatrix}$$

Cor. 18.17 : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_1 + C_2$, etc...

Donc $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$