Donc $E = F + F^{\perp}$.
Finalement, $E = F \oplus F^{\perp}$: F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Théorème 22.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^{\perp} = n - p$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Démonstration

On suppose que E est un espace ***euclidien*** de dimension n. D'après le théorème précédent, F (de dimension p) et $F^{\perp}$ sont supplémentaires : donc $\dim F^{\perp} = n - p$.
De plus, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - (n - p) = p$ et $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ (car par définition, tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$).
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, de même dimension que lui : $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

VI. Correction des exercices

Cor. 22.1 :

1) ***Symétrie*** : $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = (v|u)$.
   Linéarité à gauche :
   $(\lambda u + \mu v|w) = (\lambda x_1 + \mu x_2)\, x_3 + (\lambda y_1 + \mu y_2)\, y_3 = \lambda\,(x_1x_3 + y_1y_3) + \mu\,(x_2x_3 + y_2y_3)$.
   Donc $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda\,(u|w) + \mu\,(v|w)$.
   Par symétrie, l'application est aussi linéaire à droite donc bilinéaire.
   Définition : soit $u = xi + yj$ tel que $(u|u) = 0$. On a donc $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0\,\textbf{et}\,y = 0) \Leftrightarrow u = 0$.
   Positivité : soit $u = xi + yj$. $(u|u) = x^2 + y^2 \geqslant 0$.
   L'application donnée est donc bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.
2) La démonstration de la question précédente reste valable si l'on décompose les vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$ puisqu'aucune supposition n'a été faite sur la base $\mathcal{B}$.
3) $(i|j) = (i + 0j|0i + j) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. De même, $\langle i', j'\rangle = 0$.
4) $(i'|i') = (2i + j|2i + j) = 4 + 1 = 5$.
   $(i'|j') = (2i + j|i - 2j) = 2 - 2 = 0$.
   $(j'|j') = (i - 2j|i - 2j) = 1 + 4 = 5$.
   Soient $u = x_1'i' + y_1'j'$ et $v = x_2'i' + y_2'j'$.
   D'une part, $\langle u, v\rangle = x_1'x_2' + y_1'y_2'$.
   D'autre part, $(u|v) = (x_1'i' + y_1'j'|x_2'i' + y_2'j') = x_1'x_2'\,(i'|i') + (x_1'y_2' + y_1'x_2')\,(i'|j') + y_1'y_2'\,(j'|j')$ par linéarité et symétrie.
   Donc $(u|v) = 5\,(x_1'x_2' + y_1'y_2') = 5\langle u, v\rangle$.
   On en déduit que quel que soit $u, v \in E$, $\langle u, v\rangle = \dfrac{(u|v)}{5}$.

Cor. 22.2 :

1) Il s'agit bien d'une ***forme*** au sens où $\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ est un élément de $\mathbb{R}$.
2) Elle est ***symétrique*** : $\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$ par commutativité du produit de nombres réels.
3) Elle est ***linéaire à gauche*** :
$\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (u'_1, ..., u'_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i + \mu u'_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \mu \sum_{i=1}^{n} u'_i v_i$
Par symétrie, elle est aussi linéaire à droite.
4) Elle est ***positive*** : $\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geqslant 0.$
5) Enfin, elle est ***définie*** : $\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], u_i = 0.$

Cor. 22.3 :

1) Il s'agit bien d'une ***forme*** au sens où $\forall f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\forall g \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$,
$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$ est un élément de $\mathbb{R}$.
2) Elle est ***symétrique*** : $\forall f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\forall g \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$,
$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)h(t)\mathrm{d}t = (g|f)$ par commutativité du produit de nombres réels.
3) Elle est ***linéaire à gauche*** :
$\forall f_1 \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\forall f_2 \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\forall g \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
$(\lambda f_1 + \mu f_2|g) = \int_a^b (\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))g(t)h(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f_1(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b f_2(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$
Par symétrie, elle est aussi linéaire à droite.
4) Elle est ***positive*** : $\forall f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$,
$(f|f) = \int_a^b f(t)f(t)h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)^2 h(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ car $f^2 h \geqslant 0$.
5) Enfin, elle est ***définie*** : $\forall f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$,
$(f|f) = \int_a^b f(t)^2 h(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$ car $h > 0$ est continue et que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle.

Cor. 22.4 :

1) $(P_0|P_0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2.$
$(P_0|P_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0.$

$(P_0|P_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 3t^2 - 1\mathrm{d}t = 0.$

$(P_0|P_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 5t^3 - 3t\mathrm{d}t = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = 0.$

$(P_1|P_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$

$(P_1|P_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 3t^3 - t\mathrm{d}t = 0.$

$(P_1|P_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 5t^4 - 3t^2\mathrm{d}t = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$

$(P_2|P_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 9t^4 - 6t^2 + 1\mathrm{d}t = 2\left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right) = \frac{8}{5}.$

$(P_2|P_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 15t^5 - 14t^3 + 3t\mathrm{d}t = 0.$

$(P_3|P_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 25t^6 - 30t^4 + 9t^2\mathrm{d}t = 2\left(\frac{25}{7} - 6 + 3\right) = \frac{8}{7}.$

2) Soit $Q = X^3 + X^2 - X + 2 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$ où $(a; b; c; d)$ sont les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.
En calculant les produits scalaires suivants (on utilise la linéarité et les valeurs précédemment calculées), on a :
$(Q|P_0) = a\,(P_0|P_0) = 2a.$
Or $(Q|P_0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^3 + t^2 - t + 2\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}.$
Donc $a = \dfrac{7}{3}.$
$(Q|P_1) = b\,(P_1|P_1) = \dfrac{2b}{3}.$
Or $(Q|P_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^4 + t^3 - t^2 + 2t\mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15}.$
Donc $b = \dfrac{-2}{5}.$
$(Q|P_2) = c\,(P_2|P_2) = \dfrac{4c}{5}.$
Or $(Q|P_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 3t^5 + 3t^4 - 4t^3 + 5t^2 + t - 2\mathrm{d}t = \frac{6}{5} + \frac{10}{3} - 4 = \frac{8}{15}.$
Donc $c = \dfrac{1}{3}.$
$(Q|P_3) = d\,(P_3|P_3) = \dfrac{8d}{7}.$
Or $(Q|P_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 5t^6 + 5t^5 - 8t^4 + 7t^3 + 3t^2 - 6t\mathrm{d}t = \frac{10}{7} - \frac{16}{5} + 2 = \frac{8}{35}.$
Donc $d = \dfrac{1}{5}.$

Cor. 22.5 :

1) $\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v)$ par bilinéarité.
Donc $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(u|v)$ par symétrie du produit scalaire.
De même, $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,(u|v)$.

2) De la première expression, on tire :
$(u|v) = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$.
De la seconde expression, on tire :
$(u|v) = \dfrac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}{2}$.
Enfin, en sommant ces deux dernières expressions, on a :

$$(u|v) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} \qquad \text{(identité de polarisation)}$$

Cor. 22.6 : ***Pour le produit scalaire canonique de*** $\mathbb{R}^n$: soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$,
$\|u\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.
C-S : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}$
Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$: soient f et g deux fonctions de cet espace
$\|f\|^2 = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$.
C-S : $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$.

Cor. 22.7 :

1) Les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont unitaires donc $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, \|x_i\|^2 = (x_i|x_i) = 1$.
De plus, par hypothèse, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$.
Donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j, \|x_i - x_j\|^2 = 1 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\,(x_i|x_j)$.
Donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j, (x_i|x_j) = \dfrac{1}{2}$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac12 \\ \frac12 & \cdots & \frac12 & 1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

Donc $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac12 & \frac{n+1}{2} \\ \frac12 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac12 & \frac{n+1}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & \frac{n+1}{2} \\ \frac12 & \cdots & \cdots & \frac12 & \frac{n+1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac12 & 1 \\ \frac12 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac12 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ \frac12 & \cdots & \cdots & \frac12 & 1 \end{vmatrix}$

Finalement $\det(A) = \dfrac{n+1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Montrons maintenant que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

En effectuant le produit scalaire par x_j pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on obtient le système :

$$A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or A est inversible. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Donc la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.

Cor. 22.8 :

1) Soient $k \in [\![0; n]\!]$ et $l \in [\![0; n]\!]$.
   $(f_k|f_l) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\big((k+l)x\big) + \cos\big((k-l)x\big)}{2}\mathrm{d}x$
   Donc, si $k \neq l$,
   $(f_k|f_l) = \dfrac{1}{2(k+l)}\Big[\sin\big((k+l)x\big)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{2(k-l)}\Big[\sin\big((k-l)x\big)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$
   La famille est bien orthogonale.
   De plus, pour $k = l \neq 0$,
   $(f_k|f_k) = \dfrac{1}{4k}\Big[\sin(2kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{2}\Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$
   et, pour $k = l = 0$,
   $(f_0|f_0) = \Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$

2) La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas orthonormale.
   Pour la rendre orthonormale, il suffit de diviser chaque vecteur de la base par sa norme : la famille
   $g_0 : x \in [-\pi; \pi] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
   et $\forall k \in [\![1; n]\!]\,, g_k : x \in [-\pi; \pi] \mapsto \dfrac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$
   est une famille orthonormale de $\mathcal{C}^0([-\pi; \pi]; \mathbb{R})$.

Cor. 22.9 : $\|u + v + w\|^2 = \|(1; 3)\|^2 = 1 + 9 = 10.$
$\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 5 + 4 + 1 = 10.$
Cependant la famille n'est pas orthogonale car toute famille orthogonale est libre et qu'en dimension 2, une famille libre possède au plus deux vecteurs.
Pour une famille de 4 vecteurs, il suffit de prendre par exemple $u_1 = (1; 0)$, $u_2 = (0; 2)$, $v = (0; 2)$ et $w = (0; -1)$.

Cor. 22.10 :

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
   Symétrie : $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) = Q(-1)P(-1) + Q(0)P(0) + Q(1)P(1) = (Q|P)$.
   Linéarité à gauche : $(aP_1 + bP_2|Q) = aP_1(-1)Q(-1) + aP_1(0)Q(0) + aP_1(1)Q(1) + bP_2(-1)Q(-1) + bP_2(0)Q(0) + bP_2(1)Q(1) = a\,(P_1|Q) + b\,(P_2|Q)$.
   Par symétrie, c'est bien une forme bilinéaire.
   Positivité : $(P|P) = \sum_{i=-1}^{1} P(i)^2 \geqslant 0$.
   Définition : $(P|P) = 0 \Rightarrow P(-1) = P(1) = P(0) = 0$.
   Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui possède strictement plus de 2 racines : c'est donc le polynôme nul.
2) $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$: il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$.
   Les fonctions polynomiales étant continues et $[-1;1]$ étant un ensemble infini, c'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (l'égalité des polynômes et l'égalité des fonctions polynomiales associées sont en effet identiques).
3) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt en partant de la base canonique.
   $P_1 = 1$. $\|P_1\|_1^2 = 3$ donc $Q_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est un vecteur normé pour le premier produit scalaire.
   $P_2 = X$. $P_2 - (P_2|Q_1)\,Q_1 = X - 0 = X$ et $\|X\|_1^2 = 2$ donc $Q_2 = \dfrac{\sqrt{2}X}{2}$ forme avec Q_1 une famille orthonormée.
   $P_3 = X^2$. $P_3 - (P_3|Q_1)\,Q_1 - (P_3|Q_2)\,Q_2 = X^2 - \dfrac{2}{3}$.
   Enfin, $\left\|X^2 - \dfrac{2}{3}\right\|_1^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{3}$.
   Donc $Q_3 = \dfrac{3\sqrt{6}X^2 - 2\sqrt{6}}{6}$ forme avec Q_1 et Q_2 une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Pour le second produit scalaire, on retrouve les polynômes de Legendre vus à l'exercice 22.4.