Ex. 15.22 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de cet exercice est de montrer que

$$\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v) \Longleftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F,G), v = w \circ u.$$

a. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$.

b. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \operatorname{Ker}(u) = n - p$ et $\dim F = r$.

i. Justifier l'existence d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que $(e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Im}(u)$?

ii. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

iii. On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ soit une base de F.
On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

Corrections

Cor. 15.2 :

a. F et G sont bien inclus dans E. La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique.
Enfin, étant donnés $A, B \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
${}^t\lambda A + \mu B = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB = \lambda A + \mu B$, qui est donc symétrique - par caractérisation à l'aide de la transposition.
On fait de même pour G.

b. Par analyse-synthèse : on souhaite montrer que $\forall M \in E \exists! S \in F, \exists A \in G, M = S + A$ (définition de deux espaces supplémentaires)
Analyse : supposons que S et A existent, alors
${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$
et $M = S + A$
Donc $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.
Donc si S et A existent, alors elles sont uniques. ***Synthèse*** : En reprenant les deux expressions obtenues ci-dessus, on montre que $M = S + A$, S est symétrique et A antisymétrique.
F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

c. $p_F(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}, p_G(M) = \dfrac{M - {}^tM}{2}$ et $s(M) = {}^tM$ d'après la question précédente.
En particulier, nous venons de montrer que la transposition est la symétrique par rapport aux matrice symétrique, parallèlement aux matrices antisymétriques.

d. On cherche les matrices $M \in E$, telles que $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ que nous noterons S.
Par définition de p_F, on a donc $M = S + A$ où A est antisymétrique. Donc les solutions de cette équation sont les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & 3+y \\ 2-x & 4 & 5+z \\ 3-y & 5-z & 6 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Cor. 15.4 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :
- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x; y) \in G$ tels que $u = xe_1 + ye_2$. Cherchons donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu & = & 3x \\ \mu & = & 2x + y \\ \mu & = & 2x + y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & \dfrac{\lambda + \mu}{3} \\ y & = & \dfrac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases}$$

Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$

  1**ère **méthode : en utilisant les dimensions.
  On vérifie facilement que les familles (u_1, u_2) et (e_1, e_2) sont libres - les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = \dim G = 2$. ***Or** $F \subset G$ **donc** F **est un sous-espace vectoriel de** G.* Et comme leurs dimensions sont égales, $F = G$.

  2**ème **méthode : on démontre l'inclusion réciproque.
  Soit $e = xe_1 + ye_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

  $$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= x - y \\ \mu &= 2x + y \end{cases}$$

  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.
  Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 15.11 :

a. F est un sous-espace vectoriel de E : l'inclusion est évidente, la fonction nulle est bornée, et toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.
   ***G n'est pas un sous-espace vectoriel de** E* : en effet, $f : x \mapsto x^3$ est croissante donc monotone, $g : x \mapsto x$ aussi mais
   $f - g : x \mapsto x^3 - x$ n'est pas monotone puisque sa dérivée $f' - g' : x \mapsto 3x^2 - 1$ est négative en 0 et positive en 1.
   $H = \operatorname{Vect} \operatorname{ch}, \operatorname{sh} \exp$ donc est un sous-espace vectoriel de E.

b. La famille (sh) est libre car composée d'un unique vecteur non nul.
   La famille (sh; ch) est libre aussi : en effet, cherchons λ, μ tels que $\lambda \operatorname{sh} + \mu \operatorname{ch} = 0$.
   Alors, évalué en $x = 0$, on a $\mu = 0$.
   Et en $x = 1$, on obtient $\lambda = 0$. La famille est donc bien libre.
   Enfin $\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$ donc la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh} \exp)$ est liée.
   Donc $\dim H = 2$.

Cor. 15.13 :

a. $(i;1+i) \neq (0;0)$ donc $\big((i;1+i)\big)$ est une famille libre.
   Or $(-1;-1+i) = i(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(-1;-1+i)$ sont colinéaires.
   De même, $(2-i;1-3i) = (-1-2i)(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(2-i;1-3i)$ sont colinéaires.
   Donc la famille $\mathcal{F} = \big((i;1+i);(-1;-1+i);(2-i;1-3i)\big)$ est de rang 1 dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

b. $(m-1;1)$ est non nul quel que soit la valeur de $m \in \mathbb{R}$. Donc la famille $\big((m-1;1)\big)$ est libre.
   Cherchons si la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre : soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $\lambda(m-1;1) + \mu(-2;m-4) = (0;0)$. Ceci équivaut au système :

   $$\begin{cases} (m-1)\lambda & -2\mu &= 0 \\ \lambda & +(m-4)\mu &= 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} & \big[-2-(m-1)(m-4)\big]\mu = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - (m-1)L_2 \\ \lambda & +(m-4)\mu = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} & \big[-m^2+5m-6\big]\mu = 0 \\ \lambda & +(m-4)\mu = 0 \end{cases}$$

   On en déduit que :
   - si $-m^2 + 5m - 6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{2;3\}$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est liée donc $\operatorname{rg} \mathcal{G} = 1$;
   - sinon, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq 3$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre donc $\operatorname{rg} \mathcal{G} = 2$.

Cor. 15.18 :

a. Calculons $\operatorname{Ker} f$: soit $(x;y;z) \in \operatorname{Ker} f$. Alors :

   $$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ -3y - 6z &= 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -6y - 12z &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

   Les deux dernières équations sont proportionnelles donc

   $$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -7z \\ y &= 2z \end{cases}$$

   Finalement $\operatorname{Ker} f = \{(-7z;2z;z), z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\big((-7;2;1)\big)$

b. $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

c. $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires pour obtenir une base.
   Or $f(1;0;0) = (1;4;7)$ et $f(-1;1;0) = (1;1;1)$ ne sont pas colinéaires.
   Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1;4;7);(1;1;1)\big)$.