VI. Correction des exercices

Cor. 20.3 : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée au segment $[0;1]$,
$\left|e^1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\exp^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$ car la fonction exp est majorée par e sur $[0;1]$.
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \exp^{(k)}(0) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Cor. 20.4 : C'est encore l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exp sur le segment $[0;x]$ ou $[x;0]$ suivant le signe de x. On en déduit comme dans l'exercice précédent que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$.

Cor. 20.5 : La suite $u_n = \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ est $7-$périodique, donc la suite extraite $\left(\sin\left((7n+1)\frac{2\pi}{7}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$. Donc,
Ou bien la suite u ne possède pas de limite,
Ou bien sa limite vaut $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$.
Dans les deux cas la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ ***diverge grossièrement*** puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Cor. 20.6 : Pour tout $n > 1$, $\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
Donc $\ln(n+1) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln(n)$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = +\infty$: la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

Cor. 20.7 : Soit $S_n(x) = \sum nx^n$ et $G_n(x) = \sum x^n$. G est une série géométrique et pour tout $x \neq 1$
$S_n(x) = xG_n'(x) = x\frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
En substituant x par $\frac{1}{2}$, on en déduit que $\sum \frac{n}{2^n}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.
Pour la seconde, par linéarité, on obtient immédiatement la convergence de la série en substituant x par $\frac{j}{2}$ (où $j = \frac{2i\pi}{3}$) puis sa somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n} = \mathcal{R}e\left(\frac{j}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{j}{2}\right)^2}\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{8j\left(\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2}{49}\right) = \frac{-13}{49}.$$

Cor. 20.8 : On décompose $\frac{1}{x(x+1)}$ en éléments simples : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ d'où l'on déduit que la série proposée est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Cor. 20.9 : Pour tout entier $n > 1$, $0 < \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n}$ $\quad (E_1)$.

Or, d'après l'exercice 20.8, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)n}$ converge vers 1 en croissant (puisqu'on somme des termes positifs).

De plus, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est aussi une série croissante (puisque son terme général est positif) qui converge ***si et seulement si elle est majorée*** (par théorème de convergence monotone).

En utilisant l'encadrement (E_1), on a donc

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)n} \leqslant 1+1$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente et l'encadrement (E_1) permet d'affirmer que

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

Cor. 20.10 :

- Si $r < 0$, en posant $p = -r$, $\dfrac{1}{n^r} = n^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série est grossièrement divergente. De plus $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^p$ est croissante, le théorème précédent s'applique donc pour $-f$ qui est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant f(1) + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)^{1+p}-1}{1+p} \geqslant \sum_{k=1}^{n} k^p \geqslant 1 + \frac{n^{1+p}-1}{1+p}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^p \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1+p}}{1+p}$$
- Si $r = 0$, $S_n = n$ diverge et... est équivalente à n en $+\infty$!
- Si $0 < r < 1$, la démonstration du premier s'adapte. Cette fois-ci, la série ne diverge pas grossièrement et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^r}$ est décroissante. On en déduit que
$$\frac{(n+1)^{1-r}-1}{1-r} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant 1 + \frac{n^{1-r}-1}{1-r}$$
et finalement que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1-r}}{1-r}$.
- Si $r = 1$, on a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$.
- Enfin, si $r > 1$, la même démonstration prouve que $S = \displaystyle\sum \frac{1}{n^r}$ converge. Cependant la détermination de la limite de cette somme est ardue et en fait on ne sait en général toujours pas la calculer, sauf pour les entiers r pairs.

Cor. 20.11 : La suite x est strictement positive, son logarithme est donc défini. Pour montrer que la suite x converge, il suffit donc d'après la proposition 20.12 de montrer que la série $\sum (\ln x_{n+1} - \ln x_n)$ converge. Or

$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
En effectuant un développement limité à l'ordre 3 on obtient donc :
$\ln x_{n+1} - \ln x_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \dfrac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
La série des $\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente d'après l'exercice 20.10, la série $\sum(\ln x_{n+1} - \ln x_n)$ l'est aussi, donc la suite x tend vers un réel λ supérieur ou égal à 1 (par passage à l'exponentielle).
On en déduit que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 20.12 :

- S est à termes positifs et $\dfrac{1}{\sqrt{n^3-1}} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc S est convergente.
- $-T$ est à termes positifs et $-\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc T est divergente.
- U est à termes positifs et $\dfrac{1}{n + \ln n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc U est divergente.
- V est à termes positifs et à partir d'un certain rang $\ln n < n$ donc, à partir de ce rang, $\dfrac{1}{\sqrt{n\ln n}} > \dfrac{1}{n}$ qui est divergente. Donc V est divergente.
- W est à termes positifs et à partir d'un certain rang $e^n > n^5$ donc, à partir de ce rang, $n^3e^{-n} < \dfrac{1}{n^2}$. Donc W est convergente.

Cor. 20.13 :

1) Posons $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \dfrac{(2n)!}{2n+2)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{2(2n+1)}$.
Or $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1 + 1/n)\right) = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
Donc, il existe un rang, à partir duquel, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.
Donc la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ converge.

2) On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n^n}{(2n)!} = \dfrac{1}{n!} \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} \geqslant \frac{1}{n!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Donc $S \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \exp(1/2)$.
De même, $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n^n}{(2n)!} = \dfrac{1}{n!} \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} \leqslant \frac{1}{n!}$.
Donc $S \leqslant e$.

Cor. 20.14 :

1) La série $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente, donc S n'est pas absolument convergente.

2) On introduit la série $T(x) = \sum \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.
$T_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.
Or $T_n(0) = 0$ donc $S_n = T(1) = \displaystyle\int_0^1 T_n'(t)\mathrm{d}t = \ln(2) - (-1)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.
Il suffit donc de montrer que le reste intégral tend vers 0.
Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement S est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Cor. 20.15 : Soit $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ les séries extraites de S de rangs pairs et impairs.
$\forall n \in \mathbb{N}$,

- $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2(2n+1)+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$
- $S_{2n+2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{1}{2(2n+2)+1} + \dfrac{-1}{2(2n+1)+1} + S_{2n} = S_{2n} + \dfrac{4n+3-4n-5}{(4n+3)(4n+5)}$
  donc la série $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- On démontre de même que la série $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Les deux séries extraites sont donc adjacentes, donc convergentes et ont même somme.
Comme il s'agit des séries extraites de rangs pairs et impairs, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est elle aussi convergente.
Pour obtenir la valeur de la limite, on utilise $\mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$:
on a donc $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \dfrac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ car $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + \dfrac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$
c'est-à-dire $\left|\dfrac{\pi}{4} - S_n\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2n+3}$.
Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Cor. 20.16 :

1) Si $|z| < 1$, alors $n^4|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 < n^2|z|^2 < \dfrac{1}{n^2}$. La série est alors absolument convergente.
Si $|z| \geqslant 1$, $n^2|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la série n'est donc pas absolument convergente puisque la série des modules est grossièrement divergente.
2) On note $T(z)$ la série géométrique $\sum z^n$.
$T_n(z) = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$. Or
$zT_n'(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kz^k$ et $z^2T_n''(z) + zT_n'(z) = z\left(zT_n'(z)\right)' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2z^k = S_n(z)$.
En utilisant l'expression $T_n(z) = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et le fait que $z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n = \frac{z(1-z)+2z^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}.$$

Cor. 20.17 : $a = 0,999... = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$ et
$b = 0,142857... = \dfrac{142857}{10^6} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{10^6}} = \dfrac{1}{7}$.

Cor. 20.18 :

- Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ un rationnel. L'algorithme de la division de p par q donne les chiffres du développement décimal de r.
  Or les restes obtenus à chaque étape vérifient $R_n \in [\![0; q-1]\!]$ et sont les dividendes de l'étape suivante. Comme ils sont en nombre fini, il existe deux rangs distincts n_1 et n_2 tels que $R_{n_1} = R_{n_2}$. Et à partir de ces rangs, l'algorithme donnera une suite de restes identiques, donc des chiffres identiques dans le développement décimal, qui de ce fait est périodique.
- Réciproquement, soit $r \in \mathbb{R}$ un réel dont le développement décimal $r = \displaystyle\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est périodique à partir d'un certain rang p de période $P \in \mathbb{N}^*$.

  Alors
  $$\begin{aligned} r &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k \left[\sum_{i=0}^{+\infty} 10^{-k+iP}\right] \\ &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k \left[10^{-k} \times \frac{1}{1-10^{-P}}\right] \\ &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \frac{10^P}{10^P-1} \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k 10^{-k} \end{aligned}$$
  Cette dernière expression montre que r est un nombre rationnel.

Cor. 20.19 :

1) On obtient immédiatement $W_0 = W'_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = W'_1 = 1$.

2) On effectue le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans l'une des deux intégrales :
$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\mathrm{d}u = W'_n.$$

3) Pour n suffisamment grand,
$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$
Donc pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Cor. 20.20 : On conjecture, par exemple en examinant les valeurs de W_0, W_2, W_4, etc... que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Puis on démontre cette formule par récurrence en utilisant la formule de récurrence $(2n+2)W_{2n+2} = (2n+1)W_{2n}$.
En utilisant alors l'équivalent obtenu pour $n!$, on parvient à $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}}$.
Pour obtenir la valeur de λ, il suffit donc de calculer un équivalent de W_{2n} par une autre méthode.
Voici comment faire :
D'une part, comme $0 \leqslant \sin \leqslant 1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = W_n$$

Donc $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, ou encore, ces intégrales étant strictement positives

$$1 \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n+2}}$$

La formule de récurrence donne par ailleurs $\dfrac{W_n}{W_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
D'autre part, toujours en utilisant le fait que pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, on montre que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+2)(n+1)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)nW_nW_{n-1} \Rightarrow (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = nW_nW_{n-1}$.
De plus, $W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $2W_2W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
La suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
En conclusion, $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} W_nW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.
Donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.
En comparant à la précédente expression obtenue pour l'équivalent, on en déduit que

$$\lambda = \sqrt{2\pi} \quad \text{donc} \quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$