## Corrections

**Cor. 24.1** : On pose $u = \operatorname{ch} t$, $du = \operatorname{sh} t dt$ d'où

$I_1(x) = \displaystyle\int^{\operatorname{ch} x} \frac{1}{1+u} du = \ln(1+\operatorname{ch} x)$.

Pour simplifier la racine carrée on pense à la formule $\operatorname{ch}^2 v = 1 + \operatorname{sh}^2 v$. On pose $t = \operatorname{sh} v$, $dt = \operatorname{ch} v dv$. Il faut aussi effectuer le changement de borne :

$\operatorname{sh} v = x \Leftrightarrow \dfrac{e^v - e^{-v}}{2} = x \Leftrightarrow (e^v)^2 - 2xe^v - 1 = 0$. Après calcul du discriminant et en remarquant que $\exp > 0$, on a donc $v = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. D'où :

$I_2(x) = \displaystyle\int^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \operatorname{ch}^2 v dv$.

Il suffit alors de simplifier $\operatorname{ch}^2 v$ en utilisant sa définition :

$\operatorname{ch}^2 v = \dfrac{e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4} = \dfrac{\operatorname{ch}(2v)+1}{2}$ ce qui conduit à

$I_2(x) = \dfrac{\operatorname{sh}\left[2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{4}$.

**Cor. 24.2** :

a. On obtient immédiatement $W_0 = W_0' = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = W_1' = 1$.

b. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans l'une des deux intégrales :

$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du = W_n'.$$

c. Pour $n$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$

Donc pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

**Cor. 24.3** : On intègre par partie :

$\displaystyle\int_2^x 1 \times \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{tdt}{t\ln^2(t)} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)}$

Montrons que la partie restant à intégrer est négligeable devant l'intégrale de départ quand $x \to +\infty$. En particulier, on suppose $x > 2$ et les deux intégrales sont des intégrales positives de fonctions positives.

Tout d'abord $\forall t > 1$, $\dfrac{\frac{1}{\ln^2(t)}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \dfrac{1}{\ln t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\forall\epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, t > A \Rightarrow 0 < \frac{1}{\ln^2(t)} < \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{\ln(t)}$.

On découpe l'intégrale en deux morceaux pour $x > A$ :

$0 \leq \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} = \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \int_A^x \frac{dt}{\ln^2(t)} < \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \frac{\epsilon}{2}\int_A^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \frac{\epsilon}{2}\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$

De plus, $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} > \int_2^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)}$ est finie et indépendante de $x$. Donc :

$\forall\epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow \dfrac{\int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}} < \dfrac{\epsilon}{2}$.Donc

$\forall\epsilon > 0, \exists C = \max(A,B), x > C \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} < \frac{\epsilon}{2}\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} + \frac{\epsilon}{2}\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq \epsilon\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ ce qui signifie que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right)$$

On en conclut que $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

**Cor. 24.4** : Décomposons $R : t \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{t^2+1}{(t-1)(t^2+2t+5)}$ en éléments simples :

$R(t) = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{bt+c}{t^2+2t+5}$. On peut procéder soit par identification ou tenter d'être un peu plus astucieux :

$(t-1)R(t) = a + \dfrac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = a + b$ et

$(t-1)R(t) = a + \dfrac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} = a$ donc $b = \dfrac{3}{4}$.

Enfin $R(0) = \dfrac{-1}{5} = -a + \dfrac{c}{5}$ donc $c = \dfrac{1}{4}$.

Calculons maintenant $4J$ :

$4J = \displaystyle\int^x \frac{1}{t-1} + \frac{3t+1}{t^2+2t+5} dt = \ln|x-1| + \int^x \frac{3t+3-2}{t^2+2t+5} dt$.

La seconde intégrale se décompose en $K = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x \dfrac{2t+2}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t - 2\int^x \dfrac{1}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t$.

Le premier terme est la primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$, le second se réduit en passant par la forme canonique :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{(t+1)^2+4}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int^{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}\end{aligned}$$

On a donc $J = \dfrac{\ln|x-1|}{4} + \dfrac{3\ln\left(x^2+2x+5\right)}{8} - \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}$.

**Cor.** 24.5 : ***Première méthode :***
$\dfrac{\cos(\pi+x)\mathrm{d}(\pi+x)}{\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)} = \dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$. Posons donc $u=\tan t$ par application des règles de Bioche. On a $\mathrm{d}u = (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t = (1+u^2)\mathrm{d}t$ et

$$I(x) = \int^x \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \int^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)}.$$

En décomposant en éléments simples on obtient $\dfrac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1-u}{1+u^2}\right)$.

D'où $I(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\tan x) + \operatorname{Arctan}(\tan x) - \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)\right)$.

Soit après simplifications : $I(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(\cos x+\sin x)+x\right)$ valable sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{-\pi}{4}+k\pi; \frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$.

Pour la seconde intégrale, il suffit de remarquer que $\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x} = 1$ pour conclure que

$$\int^x \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x - \ln(\cos x+\sin x)\right).$$

***Deuxième méthode :***
On remarque que les primitives de $f+g$ et $f-g$ sont simples à calculer puis on revient à celles de $f$ et $g$.

**Cor.** 24.6 : On reconnaît une forme ressemblant à une somme de Riemann. En effet :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2.$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc $u_n$ converge vers $\ln 2$.

**Cor.** 24.12 : **Analyse** : supposons qu'une telle fonction $f$ existe. $f$ est dérivable, donc continue, donc $f'(t)$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ sont bien définis. $f$ est solution de l'équation différentielle $f' - f = I\exp$. Résolvons cette équation :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t) = \lambda e^t + Ite^t$.

De plus, $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda e^u + Iue^u\mathrm{d}u = \lambda(e-1) + Ie - I(e-1) \Rightarrow \lambda = 0$.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}, f(t) = Ite^t$.
**Synthèse** : $\forall k\in\mathbb{R}$, la fonction $f_k : t\in\mathbb{R}\mapsto kte^t$ vérifie $\forall t\in\mathbb{R}, f_k'(t) - f_k(t) = ke^t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = ke - k(e-1) = k$ donc les fonctions de cette forme sont les solutions recherchées.

**Cor.** 24.13 :

- Sur tout intervalle où $f$ ne s'annule pas, on pose $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}$, $g'(t) = \dfrac{f(t)-tf'(t)}{f(t)^2} = 3t^2$ donc $g(t) = \dfrac{t}{f(t)} = t^3 - k^3, k\in\mathbb{R}$.
- Sur tout intervalle où $f$ ne s'annule pas, on a donc $f(t) = \dfrac{t}{t^3-k^3}$.
- On suppose maintenant $k=0$ : $f(t) = \dfrac{t}{t^3} = \dfrac{1}{t^2}$ ne s'annule jamais et est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- On suppose $k\neq 0$ : $f(t)$ s'annule en $t=0$ et est définie sur chacun des trois intervalles de $\mathbb{R}\backslash\{0;k\}$. En 0, $f(t) = \dfrac{-t}{k^3} + o(t)$, elle est donc prolongeable en une fonction dérivable en 0 en prenant de part et d'autre de 0 la même constante d'intégration.
- Finalement les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $k\in\mathbb{R}, f_k(t) = \dfrac{t}{t^3-k^3}$ définies sur $]-\infty;k[$ et $]k;+\infty[$.

**Cor.** 24.17 :

- $f : t\mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Or si $0 < x < 1$, alors (en multipliant par $x > 0$) $0 < x^2 < x < 1$ : donc $\left[x^2; x\right] \subset ]0;1[$.
De même, si $x > 1$, $x^2 > x > 1$ donc $\left[x; x^2\right] \subset ]1;+\infty[$.

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ est définie pour tout $x \in ]0;1[\cup]1;+\infty[$.

- $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur son ensemble de définition $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
D'après le théorème fondamental du calcul intégral elle possède donc, sur chaque ***intervalle*** de son ensemble de définition, une primitive de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $F$ une telle primitive définie sur $]0;1[$ ou sur $]1;+\infty[$.

Par définition, $\forall x \in ]0;1[\cup]1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = F(x^2) - F(x)$.

$F$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, $I$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ ou sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x$ dans l'un de ces intervalles :
$I'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.
Si $0 < x < 1$, $x - 1 < 0$ et $\ln(x) < 0$. Si $x > 1$, $x - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$. Dans les deux cas, on a donc $I'(x) > 0$. Ceci conduit au tableau de variations suivant :

| Valeurs de $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $I'(x)$ | $+$ | | $+$ |
| Variations de $I(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

- Reste à obtenir les limites de $I$ en $0$, $1^-$, $1^+$ et $+\infty$ (ainsi éventuellement que les limites de sa dérivée).

***Limite en*** $0$ : $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\ln(t)} = 0$.
Donc $f$ est prolongeable par continuité en 0. Prolongeons $f$ par $f(0) = 0$ : $f$ est alors continue sur $[0;1[$, une primitive $F$ de $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1([0;1[)$, donc
$F(x^2) - F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F(0^2) - F(0) = 0$ d'où

$$\lim_{x\to 0} I(x) = 0$$

***Limite en*** $+\infty$ : on intègre par partie.
$I(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \frac{t \times \frac{-1}{t}}{\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{x^2 - 2x}{2\ln(x)} + \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)}\mathrm{d}t.$
On en déduit que $\forall x \in ]1;+\infty[, I(x) > \dfrac{x(x-2)}{\ln(x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x-2)}{\ln(x)} = +\infty$ (croissances comparées), d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = +\infty$$

***Limite en*** $1^+$ : on intègre à nouveau par partie en écrivant $\dfrac{1}{\ln(t)} = t \times \dfrac{1}{t\ln(t)}$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \\ &= \Big[t\ln\big|\ln(t)\big|\Big]_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \ln\big|\ln(t)\big|\mathrm{d}t \qquad \text{car pour } t > 1, \\ &= x^2\ln\left(2\ln(x)\right) - x\ln\left(\ln(x)\right) - \int_x^{x^2} \ln\big(\ln(t)\big)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\ln(t) > 0$.
Finalement, pour tout $x > 1$,

$$I(x) = x^2\ln(2) + x(x-1)\ln(\ln(x)) - \int_x^{x^2} \ln\big(\ln(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Or, en posant $h = x - 1$ :
$\lim\limits_{x\to 1^+} x^2\ln(2) = \ln(2)$
$x(x-1)\ln(\ln(x)) = (1+h)h\ln(\ln(1+h)) = (1+h)h\ln\big(h + \underset{h\to 0}{o}(h)\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
et
$\forall t \in ]1;2[, \Big|\ln\big(\ln(t)\big)\Big| \leqslant \Big|\ln\big(t-1\big)\Big| = -\ln(t-1)$ donc
$\left|\displaystyle\int_x^{x^2} \ln\big(\ln(t)\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant -\int_x^{x^2} \ln\big(t-1\big)\mathrm{d}t \leqslant [(t-1)\ln(t-1) - t + 1]_x^{x^2}$.
Enfin,
$[(t-1)\ln(t-1) - t + 1]_x^{x^2} = (x^2-1)\ln(x^2-1) - (x-1)\ln(x-1) + x - x^2 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$ (car $\lim\limits_{u\to 0} u\ln(u) = 0$).

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 1^+} \displaystyle\int_x^{x^2} \ln\big(\ln(t)\big)\mathrm{d}t = 0$ et

$$\lim_{x\to 1^+} I(x) = \ln(2)$$

***Limite en*** $1^-$ : la démonstration précédente s'adapte au cas où $x \to 1^-$ et on trouve encore

$$\lim_{x\to 1^-} I(x) = \ln(2)$$

- Tangentes aux points caractéristiques :
***Tangente en*** $0$ : on a vu que $I(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On peut donc prolonger $I$ par $I(0) = 0$ en obtenant une fonction continue.

La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable ?

Étudions la limite de $I'(x)$ lorsque $x \to 0$ : $I'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

La fonction $I$ est continue en 0 (une fois prolongée), $I'(x)$ possède pour limite 0 lorsque $x \to 0$, donc $I$ est dérivable en 0 et $I'(0) = 0$.
Donc la représentation graphique de $I$ admet la tangente d'équation $y = 0$ au point d'abscisse 0.
***Tangente en*** 1 : on fait le même raisonnement. On prolonge $I$ par continuité au point d'abscisse 1 en posant $I(1) = \ln(2)$ puisque $\lim\limits_{x\to 1} I(x) = \ln(2)$.

La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable au point d'abscisse 1 ?
Pour cela, on étudie $\lim\limits_{x\to 1} I'(x)$ :

$$I'(x) = \frac{1}{\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln'(1)} = 1.$$

La fonction $I$ est continue en 1 (une fois prolongée), $I'(x)$ possède pour limite 1 lorsque $x \to 1$, donc $I$ est dérivable en 1 et $I'(1) = 1$.
Donc la représentation graphique de $I$ admet la tangente d'équation $y = \ln(2) + 1 \times (x-1) = x + \ln(2) - 1$ au point d'abscisse 1.

- Représentation graphique : muni de l'étude ci-dessus, il devient aisé de tracer la représentation graphique de $I$