

IV. Cardinal et applications entre ensembles finis

IV.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 16.15 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\text{Card } E \geq \text{Card } f(E)$ et $\text{Card } E = \text{Card } f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.
- Si f est injective, alors $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.
- Si f est bijective, alors $\text{Card } E = \text{Card } F$.

Démonstration

- $E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$ forme une partition de E car $\asymp: (x, x') \in E^2 \mapsto x \asymp x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence (laissé en exercice).

Donc $\text{Card } E = \sum_{y \in f(E)} \text{Card } f^{-1}(\{y\}) \geq \sum_{y \in f(E)} 1 = \text{Card } f(E)$ d'après la proposition

16.12

avec égalité si et seulement si $\forall y \in f(E), \text{Card } f^{-1}(\{y\}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si f injective.

- Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc $\text{Card } E \geq \text{Card } F$ d'après le point précédent.
- Supposons f injective. Alors d'après le premier point, $\text{Card } E = \text{Card } f(E) \leq \text{Card } F$ d'après la proposition 16.10.
- Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc $\text{Card } F \leq \text{Card } E \leq \text{Card } F$ donc $\text{Card } E = \text{Card } F$.

Théorème 16.16 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles **finis**, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\text{Card } E = \text{Card } F$ alors
 $(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (f \text{ surjective}) \Leftrightarrow (f \text{ bijective})$.

Démonstration

- Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.
- Supposons f injective. Alors $\text{Card } E = \text{Card } f(E) = \text{Card } F$ donc $f(E) = F$ d'après la proposition 16.10. Donc f est surjective.
- Supposons f surjective. Alors $\text{Card } f(E) = \text{Card } F = \text{Card } E$ donc f est injective d'après le théorème précédent.

**Important !**

! Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

**Méthode**

Le théorème 16.15 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une **bijection** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.

En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par

« **Il y a autant de...** »

Ex. 16.7 Combien un n -gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

Cor. 16.7

Numérotions les sommets M_i du polygone (c'est-à-dire choisissons une bijection de l'ensemble des sommets vers $\llbracket 1; n \rrbracket$).

Il y a autant de vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_i M_j}$ que de couples $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que $i - j \notin \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} [n]$ (c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les vecteurs diagonaux et ces couples).

En effet, si $i = j$, $\overrightarrow{M_i M_i} = \vec{0}$ n'est pas un vecteur diagonal et si $i - j \equiv \pm 1 [n]$, $[M_i M_j]$ est un côté du polygone.

Or pour toute valeur de $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il y a $n - 3$ valeurs de $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ vérifiant ces conditions.

Il y a donc $n(n - 3)$ vecteurs diagonaux.

Or pour chaque diagonale $[M_i M_j]$ il y a deux vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_i M_j}$ et $\overrightarrow{M_j M_i}$: donc il y a $\frac{n(n - 3)}{2}$ diagonales dans un n -gone.

Exemples : il n'y a aucune diagonale dans un triangle, $\frac{4 \times 1}{2} = 2$ diagonales dans un quadrilatère, etc...

IV.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet**Méthode**

On appelle **principe des tiroirs** ou **principe de Dirichlet** le principe selon lequel

« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »

Ce principe est la contraposée du théorème 16.15 :

E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\text{Card } E > \text{Card } F$ alors f n'est pas injective.

En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 16.8 Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

Cor. 16.8

On démontre la contraposée : supposons que quel que soit le mois de l'année, pas plus de 2 personnes ne soient nées durant le mois. Alors le nombre de personnes dans le groupe est inférieur à $2 \times 12 = 24$. Donc dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

IV.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis**Théorème 16.17**

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\text{Card } \mathcal{F}(E, F) = \text{Card } F^{\text{Card } E}$$

Démonstration

Numérotons les éléments x_i de E avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Définir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, c'est donner, pour chaque $x_i \in E$, la valeur de $u(x_i) \in F$.

Autrement dit, choisir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, c'est :

- choisir $u(x_1) \in F$: il y a $\text{Card } F = p$ choix possibles ;
- **PUIS** choisir $u(x_2) \in F$: il y a p choix possibles ;
- ...
- **PUIS** choisir $u(x_n) \in F$: il y a $\text{Card } F = p$ choix possibles.

Donc $\text{Card } \mathcal{F}(E, F) = p^n = \text{Card}(F)^{\text{Card } E}$.

i Remarque

En notant $n = \text{Card } E$, **il y a donc autant** d'applications dans $\mathcal{F}(E, F)$ que de n -uplets dans F^n .

C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E .

IV.4. Cardinal de l'ensemble des parties**Théorème 16.18**

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

D'après la propriété 16.4, $\Phi : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \Phi(A) = \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(E, \{0; 1\})$ est bijective donc $\text{Card } \mathcal{P}(E) = \text{Card } \mathcal{F}(E, \{0; 1\}) = \text{Card}\{0; 1\}^{\text{Card } E} = 2^n$.

Autrement dit, **choisir une partie A de E , c'est choisir une application u de E dans**

$\{0; 1\}$ telle que $u(x) = 1$ si $x \in A$ et $u(x) = 0$ si $x \notin A$.

Il y a donc autant de parties de E que d'applications de E dans $\{0; 1\}$.

Donc $\text{Card } \mathcal{P}(E) = \text{Card } \mathcal{F}(E, \{0; 1\}) = \text{Card}\{0; 1\}^{\text{Card } E} = 2^n$.

V. Listes

V.1. p -listes d'éléments distincts d'un ensemble



Définition 16.19

Soit E un ensemble et p un entier.

p -liste d'éléments de E , p -uplet d'éléments de E et famille de p éléments de E sont des synonymes.

On appelle p -liste d'éléments distincts de E tout p -uplet $(x_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ de E vérifiant $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Plus simplement, ce sont les listes de p éléments de E , sans répétition possible d'un même élément.

Théorème 16.20

Le nombre de p -listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

• Si $p > n$, le principe de Dirichlet nous permet d'affirmer qu'au moins deux éléments de la liste seront égaux : $A_n^p = 0$.

• Si $p \leq n$, on fait une démonstration par *récurrence finie* sur p .

Initialisation : si $p = 0$, la liste vide convient donc $A_n^0 = 1$.

Si $p = 1$, toute liste de 1 élément de E convient donc $A_n^1 = n$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang p *strictement inférieur à* n et démontrons-la au rang $p + 1 \leq n$. On a donc $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Il y a autant de façons de choisir une liste à $p + 1$ éléments distincts que de façons de choisir ses p premiers éléments puis le $p + 1^{\text{ème}}$ distinct des p premiers.

$$\text{Donc } A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p) = \frac{n! \times (n-p)}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p-1)!} = \frac{n!}{[n-(p+1)]!}.$$

Conclusion : la propriété est initialisée en $p = 0$ et héréditaire tant que $p + 1 \leq n$, elle est donc vraie pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

V.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 16.21

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \text{Card } E > 0$ et $p = \text{Card } F > 0$. Alors le nombre d'injections de $F \rightarrow E$ est A_n^p .

Démonstration

Il suffit de remarquer que définir une injection c'est donner la liste de ses images *distinctes* (puisque'il s'agit d'une injection). Il y a donc autant d'injections de F dans E que de $\text{Card } F$ -listes d'éléments distincts de E .

V.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis**Théorème 16.22**

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Les deux ensembles ont même cardinal donc toute injection est bijective. Donc le nombre de bijections est égale au nombre d'injections et vaut

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

**Définition 16.23**

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées *permutations* de E . Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

**Notation**

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

L'ensemble des permutations de $[[1; n]]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté \mathfrak{S}_n .

Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E , et sous chaque élément, son image.

Ex. 16.9 Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

Cor. 16.9

$\phi \circ \phi(a) = \phi(c) = a$, $\phi \circ \phi(b) = \phi(b) = b$, $\phi \circ \phi(c) = \phi(a) = c$. Donc $\phi \circ \phi = \text{id}_E$.

VI. Combinaisons**VI.1. Définition**



Définition 16.24

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On appelle **combinaison** de E tout sous-ensemble de E .

De même, on appelle **combinaison de p éléments** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p .

VI.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 16.25

Pour $\text{Card } E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il y a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E .

Démonstration

Si $p = 0$, le seul sous-ensemble de E à 0 élément est \emptyset et $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

Sinon, choisir une injection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans E consiste à choisir son image $A \subset E$ **PUIS** à choisir une bijection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans A .

On applique alors le principe multiplicatif :

• il y a $p!$ bijections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans A ;

• il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons A de p éléments de E ;

• il y a donc $p! \times \binom{n}{p} = A_n^p$ injections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans E .

Donc $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments de E .

Propriété 16.26

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

On partitionne l'ensemble des combinaisons de p éléments de E en celles comprenant un élément $x_0 \in E$ fixé, et celles ne comprenant pas x_0 . On utilise alors la proposition 16.12.

Corollaire 16.27

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n : \text{démonstration combinatoire.}$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que la relation \asymp définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \asymp B \Leftrightarrow \text{Card } A = \text{Card } B$ est une relation d'équivalence. Elle partitionne donc $\mathcal{P}(E)$ comme réunion des combinaisons de p éléments avec $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Ex. 16.10 On appelle *partition d'un entier n strictement positif* toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.

Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$.

Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 3 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Cor. 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note sous la forme d'une liste toute partition de cet entier : par exemple, $1 + 2 + 3 + 1$ qui est une partition de 7 est notée $(1; 2; 3; 1)$.

Soit P_n l'ensemble des partitions de n et \mathcal{P}_n l'ensemble des parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Soit $\phi : P_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ qui à une partition u de n associe l'ensemble des sommes partielles $\sum_{j=1}^k u_j$. ϕ est une bijection, puisque qu'étant donné une partie de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on peut retrouver la liste dont elle est l'image en effectuant les différences consécutives des éléments de cette partie.

Par exemple $\phi((1; 2; 3; 1)) = \{1; 3; 6; 7\}$ et pour retrouver la liste dont cet ensemble est l'image il suffit d'écrire $(1; 3 - 1; 6 - 3; 7 - 6) = (1; 2; 3; 1)$.

Il y a donc autant de partitions de n que de parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire 2^{n-1} .

Ex. 16.11 Dénombrement des mains de poker

Dénombrer l'ensemble de toutes les mains de 5 cartes choisies parmi 52, l'ensemble des mains comportant une unique paire, comportant deux paires, comportant un brelan, etc... On rappelle que :

- une *quinte flush* est constituée de 5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent. Remarque : l'As est considéré **à la fois** comme la plus petite et la plus grande hauteur de carte.
- un *carré* est constitué de 4 cartes de même hauteur et d'une cinquième carte quelconque.
- un *full* est constitué de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première).
- une *couleur* est constituée de 5 cartes de même hauteur **dont les hauteurs ne se suivent pas**.
- une *suite* est constituée de 5 cartes dont les hauteurs se suivent **mais ne sont pas de la même couleur**.
- un *brelan* est constitué de 3 cartes de même hauteur, et de deux autres cartes **qui ne forment ni carré ni full**.
- une *double-paire* est constituée de 2 cartes de même hauteur, 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première) et d'une cinquième carte de hauteur différente.

- une *paire* est constituée de 2 cartes de même hauteur, et de trois autres cartes quelconques *qui ne forment aucune des mains ci-dessus*.

Cor. 16.11

- choisir une *quinte flush* c'est :

- 1) choisir la hauteur de sa plus petite carte (de l'As au 10) : 10 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir sa couleur : 4 choix possibles.

En tout, il y a donc 40 mains conduisant à une quinte flush.

- choisir un *carré* c'est :

- 1) choisir sa hauteur (de l'As au Roi) : 13 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir la cinquième carte : 48 choix possibles.

En tout, il y a donc $48 \times 13 = 624$ mains conduisant à un carré.

- choisir un *full* c'est :

- 1) choisir la hauteur du brelan : 13 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir la hauteur de la paire : 12 choix possibles ;
- 3) **PUIS** choisir les couleurs des 3 cartes du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles ;
- 4) **PUIS** choisir les couleurs des 2 cartes de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

En tout, il y a donc $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$ mains conduisant à un full.

- choisir une *couleur* c'est :

- 1) choisir la couleur : 4 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir les hauteurs des 5 cartes : $\binom{13}{5} = 1287$ choix possibles.

À cela, il faut ôter les quinte flush qui sont des couleurs particulières.

En tout, il y a donc $4 \times 1287 - 40 = 5108$ mains conduisant à une couleur.

- choisir une *suite* c'est :

- 1) choisir la hauteur de sa plus petite carte : 10 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir les couleurs de ses 5 cartes (de la plus petite à la plus grande) : $4^5 = 1024$ choix possibles.

À cela, il faut ôter les quinte flush qui sont des suites particulières.

En tout, il y a donc $10 \times 1024 - 40 = 10200$ mains conduisant à une suite.

- choisir un *brelan* c'est :

- 1) choisir sa hauteur : 13 choix possibles ;
- 2) **PUIS** choisir les couleurs des trois cartes du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles ;

- 3) **PUIS** choisir les hauteurs (distinctes) et couleurs des deux autres cartes : $\binom{12}{2} \times 4^2 = 1056$ choix possibles.

En tout, il y a donc $13 \times 4 \times 1056 = 54912$ mains conduisant à un brelan.

- choisir une **double-paire** c'est :

- 1) choisir les hauteurs (distinctes) des deux paires : $\binom{13}{2} = 78$ choix possibles ;

- 2) **PUIS** choisir les couleurs des cartes de chaque paire : $\binom{4}{2}^2 = 36$ choix possibles ;

- 3) **PUIS** choisir la carte restante : 44 choix possibles.

En tout, il y a donc $78 \times 36 \times 44 = 123552$ mains conduisant à une double-paire.

- choisir une **paire** c'est :

- 1) choisir sa hauteur : 13 choix possibles ;

- 2) **PUIS** choisir la couleur de ses deux cartes : $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles ;

- 3) **PUIS** choisir les hauteurs (distinctes) et les couleurs des trois autres cartes : $\binom{12}{3} \times 4^3 = 14080$ choix possibles.

En tout, il y a donc $13 \times 6 \times 14080 = 1\,098\,240$ mains conduisant à une paire.