Ex. 17.15 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geqslant x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 17.15

L'inégalité précédente est équivalente à $x \ln a \geqslant a \ln x$ puisque la fonction ln est croissante, ou aussi à $\frac{\ln a}{a} \geqslant \frac{\ln x}{x}$. Il s'agit donc de trouver, s'il existe, le maximum de la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ est nul seulement pour $x = e$. On a $f' > 0$ sur $]0, e[$, $f' < 0$ sur $]e, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi, f admet un unique maximum, obtenu pour $a = e$.
On en déduit que $e^\pi \geqslant \pi^e$. L'inégalité est même stricte puisque $\pi \neq e$ et que le maximum de f est unique.

Proposition 17.35 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec f' de signe constant sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Supposons f croissante la démonstration étant similaire dans le cas décroissant.
Si f est strictement croissante, alors f n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide, donc sa dérivée n'est pas nulle sur un tel intervalle. On établit la réciproque par contraposée.
Si f n'est pas strictement croissante, il existe deux points x et y dans I tels que $x < y$ et $f(y) \leqslant f(x)$. La restriction de f à $[x, y]$ est donc constante puisque f est croissante. La dérivée de f est alors nulle sur l'intervalle ouvert non vide $]x, y[$.

Ex. 17.16 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.16

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$, donc f est croissante. Par ailleurs, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide, f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.17 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$.

Cor. 17.17

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ dont le signe paraît difficile à étudier. Étudions les variations de f'.
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x \geqslant 0$ et f'' s'annule seulement pour $x = 0$, donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f'(0) = 0$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative

sur $\mathbb{R}_-^*$.
Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

IV.5. Limite de la dérivée

Proposition 17.36 (Limite de la dérivée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration

Soit x un point de $I \backslash \{a\}$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis entre a et x puisque f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. Il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Par encadrement $(a < c_x < x)$, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$.
D'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité ***lorsque sa dérivée possède une limite en ce point***. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.