Théorème 21.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors
$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 21.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

III.2. Propriétés

Propriété 21.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :
$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

Ex. 21.7 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$.
Calculer $\det\psi$.

Corrections

Cor. 21.2 : Notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$A = \det(u, u+v) = \det(u, u) + \det(u, v) = 0 + 1$ car $\det(u, v) = \det(I_2) = 1$.
$B = \det(u + 3v, 2u + 4v) = \det(u + 3v, -2v)$ en effectuant $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$.
Donc $B = -2\det(u, v) - 6\det(v, v) = -2$.

Enfin,
$C = \det(au+cv, bu+dv) = ab\det(u,u) + ad\det(u,v) + cb\det(v,u) + bd\det(v,v) = ad - bc.$

Cor. 21.3 :

1)
$$\begin{aligned}\det(C_1-C_2,\dots,C_{n-1}-C_n,C_n-C_1) &= \det\left(C_1-C_2,\dots,C_{n-1}-C_n,\sum_{k=1}^n C_k-\sum_{k=1}^n C_k\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Les deux déterminants sont égaux si et seulement si A est non inversible.

2) On utilise la multilinéarité du déterminant :
$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & n & \cdots & n\\ n & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & n\\ n & \cdots & n & n\end{pmatrix} &= n\det\begin{pmatrix}1 & n & \cdots & 1\\ n & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ n & \cdots & n & 1\end{pmatrix}\\ &= n\det\begin{pmatrix}1-n & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -1 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = (-1)^{n-1}n!\end{aligned}.$$

3)
$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{pmatrix} &= a_1\det\begin{pmatrix}1 & a_1-a_2 & a_1-a_3 & \cdots & a_1-a_n\\ 1 & 0 & a_2-a_3 & \cdots & a_2-a_n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_3-a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.\\ &= a_1\prod_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\end{aligned}$$

Cor. 21.4 :

1) $$\det\begin{pmatrix}x & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & x\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}x & 1 & \cdots & 1 & x+n-1\\ 1 & x & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & x+n-1\\ \vdots & & \ddots & x & x+n-1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x+n-1\end{vmatrix} = (x+n-1)\begin{vmatrix}x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & x & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1\\ \vdots & & \ddots & x & 1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Donc $\det\begin{pmatrix}x & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & x\end{pmatrix} = (x+n-1)\begin{vmatrix}x-1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & 1\\ \vdots & & \ddots & x-1 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$

2) $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est donc pas inversible pour $x = 1$ et $x = 1 - n$.

3) $\text{rg}(A_1) = 1$ puisque toutes les colonnes de la matrices sont identiques.
Donc $\dim \text{Ker}(A_1) = n - 1$.

Or les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont tous dans le noyau et forment une famille libre.

Donc $\text{Ker}(A_1) = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$.

Pour $x = 1 - n$, le calcul de $\text{Ker}(A_{n-1})$ conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} (1-n)u_1+ & u_2+ & ...+ & u_n & = & 0 \\ u_1+ & (1-n)u_2+ & ...+ & u_n & = & 0 \\ & & ... & & & \\ u_1+ & u_2+ & ...+ & (1-n)u_n & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow u_1 = u_2 = ... = u_n$$

en faisant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$. Donc

$$\text{Ker}(A_{1-n}) = \text{Vect}((1; 1; ...; 1))$$

est de dimension 1.

Donc $\text{rg}(A_{1-n}) = n - 1$ d'après le théorème du rang.

Cor. 21.5 : En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\det(M_{n+2}) = (a+b)\det(M_{n+1}) - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Donc $\det(M_{n+2}) = (a+b)\det(M_{n+1}) - ab\det(M_n)$.

On calcule $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$ et on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

La résolution conduit alors à $\det(M_n) = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$ lorsque $a \neq b$ et $\det(M_n) = (n+1)a^n$ lorsque $a = b$.

Cor. 21.6 : $D_2(X) = (1 + X^2)^2 - X^2 = 1 + X^2 + X^4$.

$D_3(X) = (1 + X^2)^3 - 2(1 + X^2)X^2 = 1 + X^2 + X^4 + X^6$.

On conjecture donc que $D_n(X)$ est un polynôme de degré $2n$, plus particulièrement que $D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$.

Pour le montrer, on développe suivant la première colonne et on obtient que $D_{n+2}(X) = (1 + X^2)D_{n+1}(X) - X^2 D_n(X)$.

On fait alors une démonstration par récurrence double :
l'***initialisation*** est faite aux rangs 2 et 3.
Hérédité : supposons que pour $n \geqslant 2$ donné, $D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ et $D_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} X^{2k}$.
Alors

$$\begin{array}{rcl} D_{n+2}(X) & = & (1+X^2)D_{n+1}(X) - X^2 D_n(X) \\ & = & \sum_{k=0}^{n+1} X^{2k} + \sum_{k=1}^{n+2} X^{2k} - \sum_{k=1}^{n+1} X^{2k} \\ & = & 1 + \sum_{k=1}^{n+2} X^{2k} = \sum_{k=0}^{n+2} X^{2k} \end{array}$$

les autres termes s'annulant.
Conclusion : la propriété est initialisée aux rangs 2 et 3 et héréditaire à partir de ces rangs, donc par récurrence double,

$$\forall n \geqslant 2, D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$$

En particulier, il s'agit bien d'un polynôme de degré $2n$.

Cor. 21.7 : Commençons par traiter le cas $n = 2$.
En notant $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$\psi(E_{1,1}) = E_{1,1}$
$\psi(E_{1,2}) = E_{2,1}$
$\psi(E_{2,1}) = E_{1,2}$
$\psi(E_{2,2}) = E_{2,2}$

Donc la matrice de ψ dans la base canonique est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\det(\psi) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

Le cas général procède de la même idée : en écrivant la matrice de ψ dans la base canonique, on a
$\psi(E_{i,i}) = E_{i,i}$ (il y aura un coefficient 1 diagonal dans cette colonne)
$\psi(E_{i,j}) = E_{j,i}$ pour $j \neq i$.
Dans le calcul du déterminant de ψ, on devra donc échanger les colonnes correspondant aux vecteurs de base $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ pour se ramener à la matrice identité, ceci pour tous les couples (i, j) où $i < j$. Or il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples de cette sorte.
Donc $\det(\psi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.