Révisions

Exercice 1.

On note pour tout réel x, $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n \operatorname{Arctan} x}{\mathrm{d}x^n}$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x)\,(1+x^2) = 1$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+2}(x)\,(1+x^2) + 2(n+1)xf_{n+1}(x) + n(n+1)f_n(x) = 0$.
3) Pour tout entier n strictement positif, on définit P_n par $P_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f_n(x)\,(1+x^2)^n$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme et donner une relation de récurrence vérifiée par ces polynômes.
4) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n-1$.
6) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, la famille $\mathcal{B}_n = (P_1, P_2, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
7) Calculer, pour tout entier n strictement positif, le coefficient dominant de P_n.
8) On note $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Calculer le déterminant de la matrice de passage $P_{\mathcal{C}_n}^{\mathcal{B}_n}$.
9) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $g(a) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.
10) Montrer que pour tout $n > 1$, P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

Exercice 2.

Soit f ***continue*** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Étendre cette propriété aux entiers n négatifs.
3) On pose $a = f(1)$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{Q}$, $f(u) = au$.
4) En utilisant la continuité de f, montrer que pour tout réel x, $f(x) = ax$.

Soit g de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$$

5) Soit $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
   Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser et que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \phi(x+y) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)}$$

6) On pose $h = \phi^{-1} \circ g$. Exprimer, pour tout couple $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y)$ en fonction de $h(x)$ et de $h(y)$.

7) En déduire une expression de $g(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit n, p deux entiers naturels non nuls.
On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.
Notamment, $S_{n,p} = 0$ si $n < p$. On pose de plus $S_{n,0} = 0$.

1) Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).
On pose pour tout entier q, $y_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x_k$.
Montrer que pour tout entier q, $x_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} y_k$.

2) Soit $k \in [\![1;p]\!]$.
Exprimer le nombre d'applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ dont l'image contient exactement k éléments à l'aide des nombres $(S_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2}$.

3) En dénombrant de deux manières le nombre d'applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$, montrer que

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$$

4) En déduire que $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

On pose

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{S_{n,p}}{p}$$

$$U_{n,k} = \sum_{p=k}^{n} \frac{\binom{p}{k}}{p}$$

5) Montrer que $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^n U_{n,k}$.

6) Montrer que

$$U_{n,k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k}$$

7) Montrer que pour $n > 1$, $s_n = (-1)^n S_{n-1,n}$.

8) Que peut-on en déduire pour la valeur de s_n ?
[Indication : on distinguera le cas $n = 1$.]