Correction DM n°4

Exercice 1.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f_1(x) = 1$.

2) La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, les fonction f_n sont donc bien définie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
$f_2(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ et
$f_3(x) = \dfrac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$.
On a donc pour tout réel x :
$f_3(x)(x^2+1) + 4xf_2(x) + 2f_1(x) = \dfrac{6x^2-2-8x^2+2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$.
Hérédité :
supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné,
$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+2}(x)(1+x^2) + 2(n+1)xf_{n+1}(x) + n(n+1)f_n(x) = 0$ et démontrons que la propriété reste vérifiée au rang $n+1$.
Dérivons l'hypothèse de récurrence :
$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+3}(1+x^2) + 2xf_{n+2}(x) + 2(n+1)xf_{n+2}(x) + 2(n+1)f_{n+1}(x) + n(n+1)f_{n+1}(x) = 0$
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+3}(1+x^2) + 2(n+2)xf_{n+2}(x) + (n+2)(n+1)f_{n+1}(x) = 0$.
Conclusion :
La propriété est initialisé au rang $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+2}(x)\big(1+x^2\big) + 2(n+1)xf_{n+1}(x) + n(n+1)f_n(x) = 0$$

Une autre démonstration possible est d'utiliser la formule de Leibnitz appliquée à
$x \mapsto (x^2+1)f_1(x) = 1$ en dérivant $n+1$ fois cette fonction.

3) La propriété est ***initialisée*** aux rangs $1, 2$ et 3 d'après la question précédente.
Hérédité :
Supposons la propriété vérifiée aux rangs $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+2$. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,
$f_{n+2}(x)(1+x^2)^{n+2} + 2(n+1)xf_{n+1}(x)(1+x^2)^{n+1} + n(n+1)f_n(x)(1+x^2)^n(1+x^2) = 0$
donc, en multipliant cette égalité par $(1+x^2)^{n+1}$
$P_{n+2} = -2(n+1)XP_{n+1} - n(n+1)(1+X^2)P_n$ puisque l'égalité est vérifiée pour tout réel x.
Or P_n et P_{n+1} sont deux polynômes, donc P_{n+2} est aussi un polynôme.
Conclusion :
La propriété est initialisée aux rangs $n=1$ et $n=2$ et héréditaire à partir de là, par récurrence double, $P_n(x) = f_n(x)(1+x^2)^n$ est donc un polynôme pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

et l'hérédité précédente nous fournit la formule de récurrence

$$P_{n+2} = -2(n+1)XP_{n+1} - n(n+1)(1+X^2)P_n$$

4) $P_1 = 1$, $P_2 = -2X$, $P_3 = 6X^2 - 2$, ces expressions découlant des expressions de f_1, f_2, f_3 obtenues Q2).
Enfin, $P_4 = -6XP_3 - 6(1+X^2)P_2 = -36X^3 + 12X + 12X + 12X^3 = -24X^3 + 24X$.
Ou sous forme factorisée, $P_4 = -24X(X-1)(X+1)$.

5) Montrons par récurrence double que $\deg(P_n) = n-1$ ***et que*** le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n+1}n!$: la propriété est ***initialisée*** pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.
Hérédité : supposons que pour n entier strictement positif donné, on ait
   - $\deg P_n = n-1$;
   - $\deg P_{n+1} = n$;
   - le coefficient dominant de P_n vaut $(-1)^{n+1}n!$;
   - le coefficient dominant de P_{n+1} vaut $(-1)^{n+2}(n+1)!$.

   Alors, $P_{n+2} = -2(n+1)XP_{n+1} - n(n+1)(1+X^2)P_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ puisque
$\deg\big(-2(n+1)XP_{n+1}\big) = n+1$ et $\deg\big(-n(n+1)(1+X^2)P_n\big) = n+1$ par hypothèse de récurrence.
Par ailleurs, $\deg(P_{n+2}) = n+1$ si et seulement si les coefficients dominants de $-2(n+1)XP_{n+1}$ et de $-n(n+1)(1+X^2)P_n$ ne s'annulent pas.
Or ce coefficient dominant vaut (toujours en utilisant l'hypothèse de récurrence) :
$c = -2(n+1)\times(-1)^{n+2}(n+1)! - n(n+1)\times(-1)^{n+1}n! = (-1)^{n+3}\left(2(n+1)(n+1)! - n(n+1)!\right)$
$\Rightarrow c = (-1)^{n+3}(n+2)! \neq 0$.
Donc, $\deg(P_{n+2}) = n+1$, et le coefficient dominant de P_{n+2} est $(-1)^{n+3}(n+2)!$.
Conclusion : par récurrence double, pour tout entier n strictement positif, $\deg(P_n) = n-1$ ***et*** P_n a pour coefficient dominant $(-1)^{n+1}n!$.

6) La famille $(P_1, P_2, ..., P_n)$ est échelonnée en degrés d'après la question précédente, ne contient pas le polynôme nul puisque $P_1 = 1$, elle est donc libre.
De plus, elle contient n vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n, donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

7) D'après la récurrence de la question 5), le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n+1}n!$.

8) La matrice $P_{\mathcal{C}_n}^{\mathcal{B}_n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B}_n)$ est une matrice triangulaire supérieure puisque $R_k = X^{k-1}$ et P_k sont de même degré pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$.
Donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, qui sont aussi les coefficients dominants des polynômes P_k.
Donc

$$\det\left(P_{\mathcal{C}_n}^{\mathcal{B}_n}\right) = \prod_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k! = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}k!\right]$$

9) Si $g = 0$ la proposition est évidente.
Sinon, il existe $b \in]a; +\infty[$ tel que $g(b) > 0$ par exemple (le cas $g(b) < 0$ se traitant de façon identique).
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $|g(x)| < \frac{g(b)}{2}$. Notamment, comme g est continue sur $\mathbb{R}$, il existe $b_1 > b$ tel que $g(b_1) = \frac{g(b)}{2}$ par application du théorème

des valeurs intermédiaires.
De même, $g(a) = 0$ donc il existe $a < b_2 < b$ tel que $g(b_2) = \frac{g(b)}{2}$.
Donc d'après le théorème de Rolle, g étant de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il existe $c \in]b_2; b_1[$ tel que $g'(c) = 0$.

10) Par définition des polynômes P_n, pour tout entier strictement positif n et tout réel x, $f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
Donc $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow f_n(x) = 0$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg P_n \leqslant n-1$, donc $\lim\limits_{\pm\infty} f_n(x) = 0$.
Démontrons maintenant que f_n possède au moins $n-1$ racines distinctes par récurrence :
Initialisation :
$P_1 = 1$ n'a aucune racine donc f_1 non plus. De même f_2 possède une racine et f_3 en possède deux.
Hérédité :
Supposons que pour $n \geqslant 3$, f_n ait $n-1$ racines distinctes $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$.
Par application du théorème de Rolle aux segments $[a_i; a_{i+1}]$, $f_{n+1} = f_n'$ possède donc $n-2$ racines distinctes, une sur chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$.
Or $\lim\limits_{-\infty} f_n(x) = 0$ donc f_{n+1} possède une autre racine sur l'intervalle $]-\infty; a_1[$.
Et de même, $\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = 0$ donc f_{n+1} possède au moins n racines distinctes.
Conclusion :
La propriété est initialisée aux rangs $1, 2$ et 3 et elle est héréditaire à partir du rang 3 donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Enfin, $\deg P_n = n - 1 \geqslant 0$ donc P_n possède au plus $n-1$ racines, et au moins $n-1$ racines distinctes d'après ce qui précède.
Donc P_n possède exactement $n-1$ racines distinctes : c'est un polynôme scindé à racines simples.

Exercice 2.

1) En posant $x = y = 0$, on obtient : $f(0) = 2f(0)$. Donc $f(0) = 0$.
De plus, pour x réel quelconque, en prenant $y = -x$, on obtient $f(0) = f(x) + f(-x)$. Donc pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
Initialisation : pour $n = 0$, $f(0) = f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x)$ d'après la question précédente.
La propriété est par ailleurs évidente pour $n = 1$.
Hérédité : supposons la propriété vraie pour n entier naturel donné.
Alors $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x)$ par définition de f.
Or, par hypothèse de récurrence, $f(nx) = nf(x)$.
Donc $f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.
Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$f(nx) = nf(x)$$

Supposons maintenant n entier négatif, de sorte que $-n$ est un entier positif.
Alors $f(nx) = -f(-nx) = -(-n)f(x)$ d'après la question précédente.
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.

3) On pose $a = f(1)$. Soit $u \in \mathbb{Q}$. Notamment, $u = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.
D'où : $f(u) = f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$ d'après la question précédente.
Or $a = f(1) = f\left(\frac{q}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$.
Finalement, $f(u) = p\dfrac{a}{q} = au$.

4) Soit x un réel. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x.
Comme de plus f est continue, on a :
$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} au_n = a \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ax$.
Donc, quel que soit le réel x, $f(x) = f(1) \times x$.

Soit g de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$$

5) Soit $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
$\phi'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.
ϕ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 1$, ϕ étant continue,

$$\phi \text{ est donc une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1;1[.$$

Soient x, y deux réels.

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1)}}{\dfrac{(e^x+1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x-1)}{(e^x+1)(e^y+1)}} = \frac{e^{x+y}-1}{e^{x+y}+1} = \phi(x+y).$$

Donc ϕ est une solution de l'équation fonctionnelle satisfaite par g.

6) On pose $h = \phi^{-1} \circ g$. Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:
$h(x+y) = \phi^{-1} \circ g(x+y) = \phi^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}\right) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi\circ h(x)+\phi\circ h(y)}{1+\phi\circ h(x)\phi\circ h(y)}\right)$ par définition de ϕ : $h = \phi^{-1} \circ g$ donc $g = \phi \circ h$.
Donc $h(x+y) = \phi^{-1}\big(\phi(h(x)+h(y))\big)$ d'après la question précédente.
Finalement, $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

7) D'après la question 4, h est continue (comme composée) et vérifie la première équation fonctionnelle donnée, donc pour tout réel x, $h(x) = h(1)x$.
Donc pour tout réel x, $g(x) = \phi(ax) = \dfrac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$ où $a = h(1) = \phi^{-1} \circ g(1)$.

Exercice 3.

1) Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier q, $y_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}x_k$.

Montrons que pour tout $q\in\mathbb{N}$, $x_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}y_k$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}y_k &= \sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_i\\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}\binom{k}{i}x_i\\
&= (-1)^q\sum_{i=0}^{q}x_i\left(\sum_{k=i}^{q}(-1)^k\binom{q}{k}\binom{k}{i}\right)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\binom{q}{k}\binom{k}{i} = \frac{q!k!}{k!(q-k)!i!(k-i)!} = \frac{q!}{i!(q-i)!}\times\frac{(q-i)!}{(q-k)!(k-i)!} = \binom{q}{i}\binom{q-i}{q-k}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}y_k &= (-1)^q\sum_{i=0}^{q}x_i\binom{q}{i}\left(\sum_{k=i}^{q}(-1)^k\binom{q-i}{q-k}\right)\\
&= (-1)^q\sum_{i=0}^{q}x_i\binom{q}{i}\left(\sum_{k=0}^{q-i}(-1)^{q-k}\binom{q-i}{k}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{q}x_i\binom{q}{i}(1-1)^{q-i}\\
&= x_q\binom{q}{q} = x_q
\end{aligned}$$

2) Soit $k\in[\![1;p]\!]$.

Choisir une application de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ dont l'image contient exactement k éléments, c'est :

- choisir les k éléments de son image parmi les p éléments de $[\![1;p]\!]$: $\binom{p}{k}$ choix possibles ;
- choisir une surjection de $[\![1;n]\!]$ dans l'image choisie à l'étape précédente : $S_{n,k}$ surjections possibles.

En tout, il y a donc $\binom{p}{k}S_{n,k}$ applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ dont l'image contient exactement k éléments.

3) Il y a p^n applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.

Dénombrons ces applications f en les regroupant par cardinal de leur image :

- $\operatorname{Im} f$ contient 1 élément : $\binom{p}{1}S_{n,1}$ applications de ce type ;
- OU $\operatorname{Im} f$ contient 2 éléments : $\binom{p}{2}S_{n,2}$ applications de ce type ;
- ...
- OU $\operatorname{Im} f$ contient $m=\min(n,p)$ éléments : $\binom{p}{m}S_{n,m}$ applications de ce type.

En tout, on obtient donc $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}S_{n,k}$ où $m=\min(n,p)$. Or si $n<p$, quel que soit

$k \in [\![n+1;p]\!]$, on a $S_{n,k}=0$. Donc

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$$

y compris dans le cas où $m = \min(n,p) = n \neq p$.

4) Dans l'égalité montrée à la question 1, posons :
   - $q = p$;
   - $x_k = S_{n,k}$;
   - $y_k = k^n$.

   On a bien, pour tout entier p, $y_p = p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x_k$.

   D'après la question 1, on peut donc affirmer que pour tout entier p,

$$x_p = S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} y_k = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

On pose

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{S_{n,p}}{p}$$

$$U_{n,k} = \sum_{p=k}^{n} \frac{\binom{p}{k}}{p}$$

5) D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{S_{n,p}}{p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n}{p} \\
&= \sum_{1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n} \frac{(-1)^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n}{p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^n \sum_{p=k} n \frac{\binom{p}{k}}{p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^n U_{n,k}
\end{aligned}$$

6) On peut démontrer la formule par récurrence ou bien utiliser la formule de Pascal pour obtenir un télescopage :

$$\begin{aligned}
U_{n,k} &= \sum_{p=k}^{n} \frac{p!}{k!(p-k)!p} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{p=k}^{n} \frac{(p-1)!}{(k-1)!\big(p-1-(k-1)\big)!} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{p=k}^{n} \binom{p-1}{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=k}^{n}\binom{p-1}{k-1} &= \binom{k-1}{k-1}+\sum_{p=k+1}^{n}\left[\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}\right] \quad \text{Formule de Pascal}\\
\text{Or,} \quad &= 1+\sum_{p=k+1}^{n}\binom{p}{k}-\sum_{p=k}^{n-1}\binom{p}{k}\\
&= 1+\binom{n}{k}-1=\binom{n}{k} \quad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

Donc $U_{n,k}=\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k}$.

7) En utilisant les deux questions précédentes, si $n>1$:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^n \times \frac{1}{k}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{n-1}=(-1)^n S_{n-1,n}
\end{aligned}$$

Si $n=1$, $s_1=-1$ et $S_{0,1}=0$ et l'égalité précédente n'est donc pas valable.

8) On en déduit donc que $s_1=-1$ et $\forall n>1, s_n=0$.