Maths - Chapitre 16

Ensembles, applications et dénombrement

I. Programme officiel

Dénombrement

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notation Card A, $\|A\|$ ou $\#A$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque de deux parties, complémentaire, produit cartésien.	La formule du crible est hors-programme.
Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, cardinal de l'ensemble des parties.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.	
Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme de Newton.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Ensembles	
Ensemble des parties d'un ensemble.	
c) Relations d'équivalence	
Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$.
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme.

II. Ensembles et applications

II.1. Rappels

Cardinal d'un ensemble fini

Nous avons déjà défini (voir paragraphe II.7. du chapitre 2) les notions suivantes.
Le nombre d'élément(s) d'un ensemble E fini est appelé ***cardinal de*** E.
C'est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe des bijections $e : E \to [\![1; n]\!]$.
Chacune de ces bijections représente ***un ordre possible*** pour le dénombrement des éléments de E : c'est une ***numérotation de ces éléments***.
Le cardinal de E est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.
On a $\operatorname{Card} \emptyset = 0$.

Ex. 16.1 Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et dont les coefficients valent 0 ou 1.
Calculer $\operatorname{Card} E_n$.

Cor. 16.1

Commençons par écrire E pour les petites valeurs de n.
$n = 0$: $E_0 = \{0; 1\}$. $\operatorname{Card} E_0 = 2$.
$n = 1$: $E_1 = \{0; 1; X; X + 1\}$. $\operatorname{Card} E_1 = 4$.
$n = 2$: $E_2 = \{0; 1; X; X + 1; X^2; X^2 + 1; X^2 + X; X^2 + X + 1\}$. $\operatorname{Card} E_2 = 8$.
L'observation de ces trois cas laisse augurer que $\operatorname{Card} E_n = 2^{n+1}$.
Démontrons le par récurrence. L'***initialisation*** est faite.
Hérédité : supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $\operatorname{Card} E_n = 2^{n+1}$.
Les polynômes de E_{n+1} sont

- ceux de degré $n + 1$, qui s'écrivent donc $P = X^{n+1} + Q$ où Q est de degré inférieur ou égal à n et a des coefficients dans $\{0; 1\}$.
  Autrement dit, $Q \in E_n$: il y a donc, par hypothèse de récurrence, 2^{n+1} polynômes de ce type.
- ceux de degré strictement inférieur à $n + 1$, c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à n.

C'est l'ensemble E_n, de cardinal 2^{n+1}.
Donc Card $E_{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+1+1}$.
Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}, k \in [\![0; n]\!]$ ont été introduits en terminale comme le nombre de manières de choisir k objets parmi n objets.
Nous les avons définis (voir paragraphe IV. du chapitre 2) d'une façon complètement différente en début d'année, notamment afin de donner et de démontrer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Nous avons étendu leur définition dans le chapitre 9 sur les développements limités - au moment où nous avons obtenu le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ - en posant (coefficient binomial généralisé) pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(\alpha - k)}{p!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{1 \times 2 \times ... \times p}$$

L'un des objectifs de ce chapitre est de montrer que les deux points de vue - celui de terminale où les coefficients binomiaux sont vus comme un outil de ***dénombrement***, et celui de PCSI où ils sont vus comme un outil de calcul littéral et d'analyse - correspondent bien aux mêmes nombres.

II.2. Ensemble des parties d'un ensemble

Notation

Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Autrement dit $\mathcal{P}(E) = \{K, K \subset E\}$.
Notamment $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ***possède un élément***
et $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}$ ***possède deux éléments***.

Remarque

Pour écrire que A est une partie d'un ensemble E on peut écrire
$A \subset E$: **A est inclus dans E**
ou
$A \in \mathcal{P}(E)$: **A appartient aux parties de E**

Ex. 16.2 Soit $E = \{a; b; c\}$. Que vaut $\mathcal{P}(E)$?

Cor. 16.2

Les sous-ensembles (ou parties) de E sont :

- $\emptyset$, seule partie à 0 élément ;
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, les trois parties à 1 élément ;
- $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$, les trois parties à 2 éléments ;
- $E = \{a; b; c\}$, la seule partie de E à 3 éléments.

Donc $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}\Big\}$.

II.3. Image directe, image réciproque d'une partie

Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

Définition 16.1 (Image directe)

Pour une partie A de E, on appelle **image directe de A par u** le sous-ensemble de F défini par $\{u(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, u(x) = y\}$

Autrement dit, c'est **l'ensemble des images par u des éléments de A**.

Notation

On note $u(A)$ l'image directe de A par u.

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u(\emptyset) = \emptyset$
- Si $A = E$, on obtient $u(E) = \operatorname{Im} u$ l'ensemble image de u.

Important !

Ne pas confondre l'ensemble image $u(E) = \operatorname{Im} u$ et l'ensemble d'arrivée F d'une application.

En effet $u(E) = F \Leftrightarrow u$ est surjective.

Ex. 16.3 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$. Que valent $f(\{b, c\})$ et $f(E)$?

Cor. 16.3

$f(\{b, c\}) = \{t\}$ et $f(E) = \{r; t\}$.

Définition 16.2 (Image réciproque)

Si B est une partie de F, on appelle **image réciproque de B par u** le sous-ensemble de E défini par $\{x \in E, u(x) \in B\}$

Autrement dit, c'est **l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B**.

Notation

On note $u^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par u.

Important !

Cette notation prête à confusion puisque $u^{-1}(B)$ est toujours défini tandis que u^{-1}, bijection réciproque de u, n'est définie que si u est bijective.

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $u^{-1}(F) = E$

Ex. 16.4 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$. Que valent $f^{-1}(\{r\})$, $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$.

Cor. 16.4

$f^{-1}(\{r\}) = \{a\}$, $f^{-1}(\{s\}) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{t\}) = \{b; c\}$.

II.4. Fonction indicatrice

Définition 16.3 (Fonction indicatrice d'une partie)

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle ***fonction indicatrice de la partie** A **de** E* l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \to & \{0; 1\} \\ x \in A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ x \notin A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{cases}$$

Propriété 16.4

Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on a

1) $\mathbb{1}_E$ est l'application constante égale à 1.
2) $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application constante égale à 0.
3) $\forall x \in E, 0 \leqslant \mathbb{1}_A(x) \leqslant 1$.
4) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
5) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
6) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
7) $\mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
8) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
9) L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0; 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.

Démonstration

- Les trois premiers points sont évidents.
- Montrons que $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
  Sens direct : supposons $A \subset B$. Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
  Si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.

Réciproque : supposons $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
Soit $x \in A$. $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$. Donc $A \subset B$.

- $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ se montre en utilisant deux fois la propriété précédente à $A \subset B$ et $B \subset A$.
- Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
  Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$. De plus $x \in A$ et $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Sinon, soit $x \notin A$, soit $x \notin B$, donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Finalement $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
- Les deux points suivants se montrent de façon similaire.
- Montrons que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{F}(E,\{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.
  Soit $u \in \mathcal{F}(E,\{0;1\})$ et $A = u^{-1}(\{1\})$.
  Si $x \in A$ alors $u(x) = 1$, sinon $u(x) \neq 1$ donc $u(x) = 0$.
  Donc $u = \mathbb{1}_A$ donc Φ est surjective.
  De plus Φ est injective et par suite bijective puisque $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

II.5. Partition, relation d'équivalence

Définition 16.5 (Partition d'un ensemble)

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille de parties de E.
On dit que cette famille forme ***une partition de*** E ***si***

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \in [\![1;p]\!]\,, A_i \bigcap A_j = \emptyset$$

Définition 16.6 (Relation d'équivalence sur un ensemble)

Étant donné un ensemble E, on dit d'une relation $\asymp$: $\begin{cases} E\times E & \rightarrow & \{\,\text{VRAI}\,;\,\text{FAUX}\,\} \\ (x;y) & \mapsto & x \asymp y \end{cases}$ que c'est une ***relation d'équivalence*** si elle est

- ***réflexive*** : $\forall x \in E, x \asymp x$ (est vrai) ;
- ***symétrique*** : $\forall (x;y) \in E^2, x \asymp y \Rightarrow y \asymp x$;
- ***transitive*** : $\forall (x;y;z) \in E^3, (x \asymp y \,\textbf{et}\, y \asymp z) \Rightarrow x \asymp z$.

Ex. 16.5 Nous connaissons déjà de nombreuses relations d'équivalences. L'égalité (de réels, de complexes, d'ensembles, d'applications, etc...) en est toujours une.
En citer d'autres.

Cor. 16.5
L'équivalence logique est une relation d'équivalence.
L'équivalence de fonctions, l'équivalence de suites, l'équivalence par ligne des systèmes linéaires, etc...

Définition 16.7 (Classes d'équivalence)

Étant donnés un ensemble E, une relation d'équivalence $\asymp$ sur E et un élément x de E, on appelle ***classe d'équivalence de*** x l'ensemble $\{y \in E, y \asymp x\}$.

Notation

On note souvent $\dot{x} = \{y \in E, y \asymp x\}$ la classe d'équivalence de x.

Proposition 16.8

L'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E forme une partition de E.

Démonstration

Soient $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deux classes d'équivalence.

- Si $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$, alors par transitivité (et symétrie) de la relation d'équivalence, $\dot{x} = \dot{y}$.
- Sinon, $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$.

Donc deux classes d'équivalence distinctes sont disjointes. Et la réunion des classes d'équivalence de E est E puisque tout élément de E est dans sa propre classe d'équivalence par réflexivité de la relation d'équivalence.

III. Cardinal d'une partie d'un ensemble

III.1. Cardinal et fonction indicatrice d'une partie

Lemme 16.9

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

$$\operatorname{Card} A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Conformément au programme officiel, cette propriété, très intuitive, est admise sans démonstration.

III.2. Cardinal d'une partie

Proposition 16.10

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$ alors

$$\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow A = E$$

Démonstration

- $\operatorname{Card} A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) \leqslant \sum_{x \in E} 1 = \operatorname{Card} E$.
- Si $A = E$, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$.

  Sinon, il existe $x_0 \in E, x_0 \notin A$ d'où $\mathbb{1}_A(x_0) = 0 < 1$.

Donc $\text{Card}\, A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) < \sum_{x\in E} 1 = \text{Card}\, E$.
Donc $\text{Card}\, A = \text{Card}\, E \Leftrightarrow A = E$.

III.3. Opérations sur les cardinaux

Proposition 16.11

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A \cap B)$$

En particulier,
$\text{Card}(A \cup B) \leqslant \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
et $\text{Card}\, \overline{A} = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A$.

Démonstration

$\text{Card}(A \cup B) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x\in E} \mathbb{1}_B(x) - \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ donc
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A \cap B)$.

Proposition 16.12

Si $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une partition d'un ensemble E fini, alors

$$\text{Card}\, E = \sum_{i=1}^{p} \text{Card}\, A_i$$

Démonstration

C'est un corollaire de la proposition précédente que l'on démontre par récurrence sur p.

Proposition 16.13

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F$.

Démonstration

Soient n le cardinal de E et $b : E \to [\![1;n]\!]$ une bijection associée.
$E \times F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{b^{-1}(i)\}\right) \times F = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\{b^{-1}(i)\} \times F\right)$ est une partition de $E \times F$ donc
$\text{Card}\, E \times F = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\Big(\{b^{-1}(i)\} \times F\Big)$ d'après la proposition précédente, d'où
$\text{Card}\, E \times F = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\, F = n\, \text{Card}\, F = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F$.
Une façon plus simple de se représenter ce résultat consiste à se représenter les éléments de $E \times F$, c'est-à-dire ***les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F***

comme les cases d'un tableau où chaque ligne correspond à un élément de E et chaque colonne à un élément de F :

	f_1	f_2	$\dots$	f_p
e_1	$(e_1; f_1)$	$(e_1; f_2)$	$\dots$	$(e_1; f_p)$
e_2	$(e_2; f_1)$	$(e_2; f_2)$	$\dots$	$(e_2; f_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_n	$(e_n; f_1)$	$(e_n; f_2)$	$\dots$	$(e_n; f_p)$

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est le nombre de cases du tableau, c'est-à-dire $n \times p = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.

Corollaire 16.14

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Card}(E^p) = (\operatorname{Card} E)^p$.

III.4. Principe additif, principe multiplicatif

Méthode

Le ***principe additif*** de dénombrement est l'utilisation des formules 16.11 et 16.12 aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles vérifiant ***une ou plusieurs propriétés données*** : choisir les éléments vérifiant une première propriété **ou** une seconde propriété **ou**...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***diagrammes de Venn*** (cf. chapitre 1 section III.7.).

Le ***principe multiplicatif*** de dénombrement est l'utilisation de la propriété 16.13 et de son corollaire aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles résultant ***de choix successifs*** : on choisit un premier élément PUIS un deuxième élément PUIS...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***arbres de choix***.

Ex. 16.6 Combien y a-t-il de mots possibles formés avec 2 lettres de l'alphabet ?
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres commençant par la lettre a ou se terminant par la lettre z.
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres distinctes ?

Cor. 16.6

On note $\mathcal{A}$ l'alphabet, $\operatorname{Card} \mathcal{A} = 26$.

Les mots de deux lettres sont les éléments de $E = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, il y en a donc $26 \times 26 = 26^2$.
Notons $A \subset E$ l'ensemble des mots de deux lettres commençant par `a` et $B \subset E$ l'ensemble des mots de deux lettres se terminant par `z`.
L'ensemble des mots de deux lettres commençant par `a` **ou** se terminant par `z` est $A \cup B$, il y en a donc
$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B = 26 + 26 - 1 = 51$.
L'ensemble C des mots de deux lettres distinctes et l'ensemble D des mots de deux lettres identiques forment une partition de E. Donc
$\operatorname{Card} C = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} D = 26 \times 26 - 26 = 26 \times 25$.

IV. Cardinal et applications entre ensembles finis

IV.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 16.15 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

- $E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$ forme une partition de E car $\asymp$: $(x, x') \in E^2 \mapsto x \asymp x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence (laissé en exercice).
  Donc $\operatorname{Card} E = \sum_{y \in f(E)} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) \geqslant \sum_{y \in f(E)} 1 = \operatorname{Card} f(E)$ d'après la proposition 16.12
  avec égalité si et seulement si $\forall y \in f(E), \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si f injective.
- Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ d'après le point précédent.
- Supposons f injective. Alors d'après le premier point, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$ d'après la proposition 16.10.
- Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ donc $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Théorème 16.16 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
$(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (f \text{ surjective}) \Leftrightarrow (f \text{ bijective})$.

Démonstration

- Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.
- Supposons f injective. Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$ d'après la proposition 16.10. Donc f est surjective.
- Supposons f surjective. Alors $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ donc f est injective d'après le théorème précédent.

Important !

Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 16.15 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 16.7 Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

Cor. 16.7

Numérotons les sommets M_i du polygone (c'est-à-dire choisissons une bijection de l'ensemble des sommets vers $[\![1;n]\!]$).
Il y a autant de vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_iM_j}$ que de couples $(i;j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $i - j \not\equiv \left|\begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right. [n]$ (c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les vecteurs diagonaux et ces couples).
En effet, si $i = j$, $\overrightarrow{M_iM_i} = \vec{0}$ n'est pas un vecteur diagonal et si $i - j \equiv \pm 1\,[n]$, $[M_iM_j]$ est un côté du polygone.
Or pour toute valeur de $i \in [\![1;n]\!]$, il y a $n-3$ valeurs de $j \in [\![1;n]\!]$ vérifiant ces conditions.
Il y a donc $n(n-3)$ vecteurs diagonaux.
Or pour chaque diagonale $[M_iM_j]$ il y a deux vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_iM_j}$ et $\overrightarrow{M_jM_i}$: donc il y a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un n-gone.
Exemples : il n'y a aucune diagonale dans un triangle, $\dfrac{4 \times 1}{2} = 2$ diagonales dans un quadrilatère, etc...

IV.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 16.15 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 16.8 Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

Cor. 16.8

On démontre la contraposée : supposons que quel que soit le mois de l'année, pas plus de 2 personnes ne soient nées durant le mois. Alors le nombre de personnes dans le groupe est inférieur à $2 \times 12 = 24$. Donc dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

IV.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 16.17

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Numérotons les éléments x_i de E avec $i \in [\![1; n]\!]$.
Définir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, ***c'est donner, pour chaque*** $x_i \in E$, ***la valeur de*** $u(x_i) \in F$.
Autrement dit, choisir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, c'est :

- choisir $u(x_1) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles ;
- ***PUIS*** choisir $u(x_2) \in F$: il y a p choix possibles ;

  ...
- ***PUIS*** choisir $u(x_n) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles.

Donc $\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = p^n = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card} E}$.

Remarque

En notant $n = \operatorname{Card} E$, ***il y a donc autant*** d'applications dans $\mathcal{F}(E, F)$ que de n-uplets dans F^n.
C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

IV.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 16.18

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

D'après la propriété 16.4, $\Phi : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \Phi(A) = \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$ est bijective donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E, \{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.

Autrement dit, ***choisir une partie*** A ***de*** E***, c'est choisir une application*** u ***de*** E ***dans*** $\{0;1\}$ ***telle que*** $u(x) = 1$ ***si*** $x \in A$ ***et*** $u(x) = 0$ ***si*** $x \notin A$***.***

Il y a donc autant de parties de E ***que d'applications de*** E ***dans*** $\{0;1\}$***.***

Donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E, \{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.

V. Listes

V.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 16.19

Soit E un ensemble et p un entier.

p***-liste d'éléments de*** E, p***-uplet d'éléments de*** E et ***famille de*** p ***éléments de*** E sont des synonymes.

On appelle p***-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall (i;j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Plus simplement, ce sont les listes ***de*** p ***éléments de*** E***, sans répétition possible d'un même élément***.

Théorème 16.20

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

•Si $p > n$, le principe de Dirichlet nous permet d'affirmer qu'au moins deux éléments de la liste seront égaux : $A_n^p = 0$.

•Si $p \leq n$, on fait une démonstration par ***récurrence finie*** sur p.

Initialisation : si $p = 0$, la liste vide convient donc $A_n^0 = 1$.

Si $p = 1$, toute liste de 1 élément de E convient donc $A_n^1 = n$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang p ***strictement inférieur à*** n et démontrons-la au rang $p+1 \leq n$. On a donc $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Il y a autant de façons de choisir une liste à $p+1$ éléments distincts que de façons de choisir ses p premiers éléments puis le $p+1^{\text{ème}}$distinct des p premiers.

Donc $A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p) = \dfrac{n! \times (n-p)}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!} = \dfrac{n!}{[n-(p+1)]!}$.

Conclusion : la propriété est initialisée en $p=0$ et héréditaire tant que $p+1 \leq n$, elle est donc vraie pour tout $p \in [\![0;n]\!]$.

V.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 16.21

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$. Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

Il suffit de remarquer que définir une injection c'est donner la liste de ses images ***distinctes*** (puisqu'il s'agit d'une injection). Il y a donc autant d'injections de F dans E que de $\operatorname{Card} F$-listes d'éléments distincts de E.

V.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 16.22

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Les deux ensembles ont même cardinal donc toute injection est bijective. Donc le nombre de bijections est égale au nombre d'injections et vaut

$A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{1} = n!$.

Définition 16.23

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

L'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.

Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 16.9 Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

Cor. 16.9

$\phi \circ \phi(a) = \phi(c) = a$, $\phi \circ \phi(b) = \phi(b) = b$, $\phi \circ \phi(c) = \phi(a) = c$. Donc $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_E$.

VI. Combinaisons

VI.1. Définition

Définition 16.24

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

VI.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 16.25

Pour $\mathrm{Card}\, E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Si $p = 0$, le seul sous-ensemble de E à 0 élément est $\emptyset$ et $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.
Sinon, choisir une injection de $[\![1; p]\!]$ dans E consiste à choisir son image $A \subset E$ ***PUIS*** à choisir une bijection de $[\![1; p]\!]$ dans A.
On applique alors le principe multiplicatif :

- il y a $p!$ bijections de $[\![1; p]\!]$ dans A ;
- il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ combinaisons A de p éléments de E ;
- il y a donc $p! \times \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = A_n^p$ injections de $[\![1; p]\!]$ dans E.

Donc $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments de E.

Propriété 16.26

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1;n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

On partitionne l'ensemble des combinaisons de p éléments de E en celles comprenant un élément $x_0 \in E$ fixé, et celles ne comprenant pas x_0. On utilise alors la proposition 16.12.

Corollaire 16.27

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Il suffit de remarquer que la relation $\asymp$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \asymp B \Leftrightarrow \text{Card}\, A = \text{Card}\, B$ est une relation d'équivalence. Elle partitionne donc $\mathcal{P}(E)$ comme réunion des combinaisons de p éléments avec $p \in [\![0;n]\!]$.

Ex. 16.10 On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Cor. 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note sous la forme d'une liste toute partition de cet entier : par exemple, $1+2+3+1$ qui est une partition de 7 est notée $(1;2;3;1)$.
Soit P_n l'ensemble des partitions de n et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1;n]\!]$.
Soit $\phi : P_n \to \mathcal{P}_n$ qui à une partition u de n associe l'ensemble des sommes partielles $\sum_{j=1}^{k} u_j$. ϕ est une bijection, puisque qu'étant donné une partie de $[\![1;n]\!]$, on peut retrouver la liste dont elle est l'image en effectuant les différences consécutives des éléments de cette partie.
Par exemple $\phi((1;2;3;1)) = \{1;3;6;7\}$ et pour retrouver la liste dont cet ensemble est l'image il suffit d'écrire $(1;3-1;6-3;7-6) = (1;2;3;1)$.
Il y a donc autant de partitions de n que de parties de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire 2^{n-1}.

Ex. 16.11 Dénombrement des mains de poker
Dénombrer l'ensemble de toutes les mains de 5 cartes choisies parmi 52, l'ensemble des mains comportant une unique paire, comportant deux paires, comportant un brelan, etc...On rappelle que :

- une ***quinte flush*** est constituée de 5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent. Remarque : l'As est considéré ***à la fois*** comme la plus petite et la plus grande hauteur de carte.

- un ***carré*** est constitué de 4 cartes de même hauteur et d'une cinquième carte quelconque.
- un ***full*** est constitué de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première).
- une ***couleur*** est constituée de 5 cartes de même hauteur ***dont les hauteurs ne se suivant pas***.
- une ***suite*** est constituée de 5 cartes dont les hauteurs se suivent ***mais ne sont pas de la même couleur***.
- un ***brelan*** est constitué de 3 cartes de même hauteur, et de deux autres cartes ***qui ne forment ni carré ni full***.
- une ***double-paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première) et d'une cinquième carte de hauteur différente.
- une ***paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, et de trois autres cartes quelconques ***qui ne forment aucune des mains ci-dessus***.

Cor. 16.11

- choisir une ***quinte flush*** c'est :
  1) choisir la hauteur de sa plus petite carte (de l'As au 10) : 10 choix possibles ;
  2) ***PUIS*** choisir sa couleur : 4 choix possibles.

  En tout, il y a donc 40 mains conduisant à une quinte flush.
- choisir un ***carré*** c'est :
  1) choisir sa hauteur (de l'As au Roi) : 13 choix possibles ;
  2) ***PUIS*** choisir la cinquième carte : 48 choix possibles.

  En tout, il y a donc $48 \times 13 = 624$ mains conduisant à un carré.
- choisir un ***full*** c'est :
  1) choisir la hauteur du brelan : 13 choix possibles ;
  2) ***PUIS*** choisir la hauteur de la paire : 12 choix possibles ;
  3) ***PUIS*** choisir les couleurs des 3 cartes du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles ;
  4) ***PUIS*** choisir les couleurs des 2 cartes de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

  En tout, il y a donc $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$ mains conduisant à un full.
- choisir une ***couleur*** c'est :
  1) choisir la couleur : 4 choix possibles ;
  2) ***PUIS*** choisir les hauteurs des 5 cartes : $\binom{13}{5} = 1287$ choix possibles.

  À cela, il faut ôter les quinte flush qui sont des couleurs particulières.
  En tout, il y a donc $4 \times 1287 - 40 = 5108$ mains conduisant à une couleur.
- choisir une ***suite*** c'est :
  1) choisir la hauteur de sa plus petite carte : 10 choix possibles ;

2) ***PUIS*** choisir les couleurs de ses 5 cartes (de la plus petite à la plus grande) : $4^5 = 1024$ choix possibles.

À cela, il faut ôter les quinte flush qui sont des suites particulières.
En tout, il y a donc $10 \times 1024 - 40 = 10200$ mains conduisant à une suite.

- choisir un ***brelan*** c'est :

1) choisir sa hauteur : 13 choix possibles ;

2) ***PUIS*** choisir les couleurs des trois cartes du brelan : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ choix possibles ;

3) ***PUIS*** choisir les hauteurs (distinctes) et couleurs des deux autres cartes : $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \times 4^2 = 1056$ choix possibles.

En tout, il y a donc $13 \times 4 \times 1056 = 54912$ mains conduisant à un brelan.

- choisir une ***double-paire*** c'est :

1) choisir les hauteurs (distinctes) des deux paires : $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = 78$ choix possibles ;

2) ***PUIS*** choisir les couleurs des cartes de chaque paire : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}^2 = 36$ choix possibles ;

3) ***PUIS*** choisir la carte restante : 44 choix possibles.

En tout, il y a donc $78 \times 36 \times 44 = 123552$ mains conduisant à une double-paire.

- choisir une ***paire*** c'est :

1) choisir sa hauteur : 13 choix possibles ;

2) ***PUIS*** choisir la couleur de ses deux cartes : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ choix possibles ;

3) ***PUIS*** choisir les hauteurs (distinctes) et les couleurs des trois autres cartes : $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \times 4^3 = 14080$ choix possibles.

En tout, il y a donc $13 \times 6 \times 14080 = 1\,098\,240$ mains conduisant à une paire.