Maths - Chapitre 17

Dérivabilité

I. Programme officiel

Dérivabilité

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Dérivabilité a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	$\rightleftharpoons$ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité.	
Dérivabilité à gauche, à droite.	
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométriques et cinématiques.
Inégalité des accroissements finis.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à ce stade ; elle n'appelle aucun développement supplémentaire. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes.	
Théorème de la limite de la dérivée.	
c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Définition et opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	
Formule de Leibniz.	

II. Dérivabilité en un point

II.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l'obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d'un point) et d'autres notions (croissance d'une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c'est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d'une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l'étude des ***suites récurrentes*** : nous verrons en effet qu'on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction f des conséquences concernant le comportement d'une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par commodité, on utilisera la notation suivante.

Définition 17.1 (Intérieur d'un intervalle)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. ***L'intérieur*** de I est l'intervalle obtenu en privant I de ses bornes. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I. Un point est dit ***intérieur à*** I si c'est un point de $\mathring{I}$.

Ex. 17.1 Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour $I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou encore $I =]a, b[$, on a toujours $\mathring{I} =]a, b[$. Pour $I = [a, +\infty[$ on a $\mathring{I} =]a, +\infty[$.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant une infinité de points.
De plus on notera $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

II.2. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 17.2

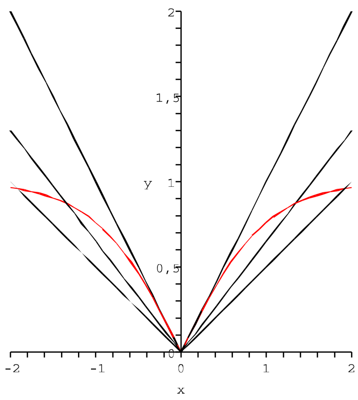
On appelle ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation*** de f en $a \in I$ la fonction

$$\tau_a : \begin{cases} I\backslash\{a\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

Définition 17.3 (Nombre dérivé)

On dit que f est dérivable en a si τ_a possède une limite finie lorsque x tend vers a. La limite est alors appelée ***nombre dérivé*** de f en a.
On dit que f est dérivable à gauche en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x < a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à gauche*** de f en a.
On dit que f est dérivable à droite en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x > a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à droite*** de f en a.



Notation

On note $f'(a)$ le nombre dérivé, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite.

Proposition 17.4

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{cases} \textbf{ et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

II.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

Théorème 17.5

f est dérivable en a si et seulement si ***au voisinage de*** $x \to a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 9 proposition 9.13.

Corollaire 17.6

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ si f est dérivable en a ;
$x = a$ si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en a.

Remarque

Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une ***vitesse moyenne***. La dérivée s'interprète alors comme une ***vitesse instantanée***.

Théorème 17.7 (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Supposons f dérivable en a. Alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ donc $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ ce qui est la définition de la continuité de f en a.

Important ! Continue n'implique pas dérivable

La réciproque est fausse. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Si $x < 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Si $x > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$. Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Ex. 17.2 Soit $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Cor. 17.2

On a $\dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} = \dfrac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}h - \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
À partir de cette écriture, on obtient que la limite vaut $-f'(a)$.

II.4. Théorèmes opératoires

Proposition 17.8 (Opérations pour la dérivée en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en un point a de I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration

- Soit $x \neq a$, $\dfrac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x-a} = \alpha\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} + \beta\dfrac{g(x) - g(a)}{x-a}$. Puisque f et g sont dérivables en a, le théorème opératoire sur les combinaisons linéaires de limites permet d'affirmer que $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable en a et que

$(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$.

- Soit $x\neq a$, $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Les fonctions f et g sont dérivables donc continues en a, ainsi $\lim\limits_a\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)\right)=f'(a)g(a)$ et de même $\lim\limits_a f(a)\left(\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=f(a)g'(a)$.
  Par suite, fg est dérivable en a et $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
- Comme g est continue en a et $g(a)\neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisinage de a. Pour tout x dans un tel voisinage avec $x\neq a$, on a $\dfrac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a}=-\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}$.
  Or $\lim\limits_a -\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}=\dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Il suffit d'écrire $\dfrac{f}{g}=f\dfrac{1}{g}$, puis d'utiliser les deux résultats précédents.

Proposition 17.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)

Soit $f:I\to J$ et $g:J\to\mathbb{K}$ deux applications et a un point de I. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration

Soit $\psi:I\to\mathbb{K}$ définie par $\psi(x)=\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{f(x)-f(a)}$ si $f(x)\neq f(a)$ et $\psi(x)=g'(f(a))$ si $f(x)=f(a)$. Par construction on a $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=g'(f(a))$. Par ailleurs, pour tout $x\neq a$ dans I, on a l'égalité $\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})\psi(x)$. La fonction f étant dérivable en a, il vient $\lim\limits_{x\to a}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=f'(a)g'(f(a))$. On a ainsi prouvé que $g\circ f$ est dérivable en a et que $(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$.

Remarque

La démonstration qui consisterait à écrire que pour $x\neq a$,

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{f(x)-f(a)}\right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers $f'(a)$ et la deuxième vers $g'(f(a))$ est naturelle, mais fausse. Il est possible que $f(x)-f(a)$ s'annule sur tout voisinage de a pour des valeurs différentes de a. Par exemple, $f:x\to x^2\sin\frac{1}{x}$ s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire ψ évite ce problème.

Théorème 17.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)

Soit $f:I\to J$ une fonction bijective et continue, b un point de J et $a=f^{-1}(b)$. On suppose f dérivable en a. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a)\neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration

Soit $y \in J$ avec $y \neq b$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$. D'après le théorème 14.39, f^{-1} est continue sur J. Par suite, $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Ainsi, si $f'(a) \neq 0$, on a, d'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \dfrac{1}{f'(a)}$; f^{-1} est bien dérivable en b. En revanche, si $f'(a) = 0$, f^{-1} étant strictement monotone, on a $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \pm\infty$.

II.5. Sens de variation et dérivée

Proposition 17.11 (Croissante implique dérivée positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un point de I.

- Si f est dérivable à gauche en a, on a $f'_g(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable à droite en a, on a $f'_d(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable en a, on a $f'(a) \geqslant 0$.

Démonstration

Pour $x \in I$ avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. En passant à la limite à gauche, à droite ou pour $x \neq a$, on obtient les trois points du théorème.

Définition 17.12 (Point anguleux)

Si f est ***continue en*** a, ***dérivable à gauche et à droite*** en a avec $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, le point $A(a, f(a))$ s'appelle un ***point anguleux***.

Remarque

En un point anguleux $A(a, f(a))$, on définit
une demi-tangente à gauche d'équation $y = f(a) + f'_g(a) \times (x - a)$ et
une demi-tangente à droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a) \times (x - a)$.

III. Dérivabilité sur un intervalle

Dans tout ce qui suit I et J sont des intervalles réels.

III.1. Définitions

Définition 17.13 (Fonction dérivée)

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
La fonction $\begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est alors appelée ***fonction dérivée*** ou plus simplement ***dérivée*** de f.

Notation

Elle est noté f' (notation de Newton) ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation de Leibniz).

Ex. 17.3

- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^n$ a pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Par définition (voir chapitre sur les fonctions usuelles) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{\mathrm{d}\left(\ln|x|\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$
- Nous avons aussi démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x), \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$
  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\mathrm{d}\left(a^x\right)}{\mathrm{d}x} =$ .... et $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\mathrm{d}\left(x^r\right)}{\mathrm{d}x} =$ ....
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$ et
  $\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Dérivées des bijections réciproques des fonctions trigonométriques :
  ....
  ....
  ....

Définition 17.14

Si f est une fonction dérivable sur I ***et que*** f' ***est continue sur*** I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition 17.15

Si f est dérivable, et si sa dérivée est elle aussi ***dérivable de dérivée continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ la dérivée de f'.

Définition 17.16

De même, si f est $n \in \mathbb{N}$ fois dérivable sur I ***de dérivée n-ième continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ la dérivée n-ième de f. On retrouve notamment pour $n = 0$ les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur I c'est-à-dire continue sur I.

Définition 17.17

Enfin, si f est indéfiniment dérivable sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Ex. 17.4 Si f est dérivable et si elle est paire ou impaire, sa dérivée f' a-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

Cor. 17.4

Oui. Si f est paire alors f' est impaire, il suffit de vérifier que le taux d'accroissement entre a et x est l'opposé de celui entre $-a$ et $-x$. Si f est impaire alors f' est paire, car le taux d'accroissement entre a et x est égal à celui entre $-a$ et $-x$.

Ex. 17.5 Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est-elle aussi bornée ? Justifier.

Cor. 17.5

Non. Considérer $f : x \mapsto \sin(x^2)$, alors $f' : x \mapsto 2x\cos(x^2)$ n'est pas bornée.

III.2. Théorèmes opératoires

Proposition 17.18 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration

Ce sont des conséquences du théorème 17.8 que l'on applique à chaque point de I.

Proposition 17.19 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème de composition des dérivées 17.9 que l'on applique pour chaque point de I.

Théorème 17.20 (Bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I ; de plus $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème 17.10 que l'on applique pour chaque point de J.

Remarque

On peut retrouver cette formule en écrivant $f \circ f^{-1} = Id_J$ puis en dérivant comme une composée. On obtient en effet $(f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$.
Une autre façon de retenir cette formule sans effort est d'utiliser la notation de Leibniz : on pose $y = f(x)$ donc $x = f^{-1}(y)$ et on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Ex. 17.6 Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont n fonctions dérivables sur I avec $n \geqslant 1$, que vaut la dérivée du produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \dots u_n$?

Cor. 17.6

Par récurrence sur n, on peut généraliser la formule de la dérivée d'un produit.

$\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k' \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} u_i\right)$.

Ex. 17.7 Calculer la dérivée, sur un ensemble à préciser, de $f : x \mapsto x^x$.

Cor. 17.7

La fonction f est définie pour $x > 0$ et $f(x) = e^{x \ln x}$. D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, $f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x$.

Ex. 17.8 Existe-t-il des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Cor. 17.8

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$. D'après les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Elle est aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, puisque pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ lorsque x tend vers 0. Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Or $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.
En effet, $f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$.
Ainsi, f' n'est pas continue en 0 et donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

III.3. Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$

Proposition 17.21 (Combinaison linéaire)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Pour tous α et β éléments de $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Démonstration

Soit α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. La preuve se fait par récurrence sur n.
Le résultat pour $n = 0$ a été établi dans le chapitre 14. On suppose le résultat vrai pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, où n est un entier ; on le montre pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soit f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Comme $n + 1 \geqslant 1$, f et g sont dérivables sur I, f' et g' sont alors toutes deux de classe $\mathcal{C}^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\alpha f' + \beta g'$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Or $\alpha f' + \beta g' = (\alpha f + \beta g)'$, donc $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Par ailleurs, $(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = (\alpha f' + \beta g')^{(n)}$ et, par hypothèse de récurrence, $(\alpha f' + \beta g')^{(n)} = \alpha f^{(n+1)} + \beta g^{(n+1)}$.
La propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 17.22 (Produit, formule de Leibniz)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. La fonction fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

Démonstration

La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est acquis puisque le produit de deux fonctions continues est une fonction continue et la formule est triviale.

On suppose que pour un entier n donné, le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que la formule de Leibniz est vraie. On établit ces résultats pour deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. En particulier, f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(fg)' = fg' + f'g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I par hypothèse de récurrence. Ainsi, le produit fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
On établit maintenant la formule de Leibniz pour $n+1$. On écrit $(fg)^{(n+1)} = (fg' + f'g)^{(n)} = (fg')^{(n)} + (f'g)^{(n)}$ et on utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} \text{Il vient } (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(g')^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \end{aligned}.$$

Le reste de la démonstration est similaire à la démonstration de la formule du binôme.

Proposition 17.23 (Quotient)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec g qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration

On écrit $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. Une récurrence immédiate montre, comme g ne s'annule pas sur I, que $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et le théorème précédent permet de conclure.

Proposition 17.24 (Composition)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux fonctions. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 17.25 (Bijection réciproque)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Les démonstrations de la proposition 17.24 et du théorème 17.25 sont hors-programme.

Remarque

- Il est immédiat que ces théorèmes se généralisent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les fonctions de référence vues au chapitre 5 sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité. ***Attention cependant*** : leur ensemble de dérivabilité n'est pas toujours leur ensemble de définition. Par exemple, Arccos et Arcsin sont définies sur $[-1;1]$ mais dérivables (et $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1;1[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. Ces deux dernières formules se démontrent aisément en écrivant :

$$\frac{\mathrm{d}^k e^{ix}}{\mathrm{d}x^k} = \cos^{(k)}(x) + i\sin^{(k)}(x) = i^k e^{ix} = e^{ik\frac{\pi}{2}} e^{ix} = \cos\left(x + \tfrac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(x + \tfrac{k\pi}{2}\right).$$

Ex. 17.9 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$.

Cor. 17.9

On applique la formule de Leibniz en remarquant que, si $k \geqslant 3$, alors $\dfrac{\mathrm{d}^k(x^2 - x + 1)}{\mathrm{d}x^k} = 0$.
On obtient $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x^2 - (2n+1)x + n^2 + 1)e^{-x}$.

IV. Éléments de calcul différentiel pour les fonctions à valeurs réelles

Dans cette section, on note $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec $a < b$ et les fonctions envisagées sont ***à valeurs réelles***. Le but de cette section est de démontrer des propriétés énoncées (sans démonstration) au chapitre 3 et d'énoncer en les démontrant des théorèmes généraux valables pour les fonctions définies sur I, dérivables sur $\overset{o}{I}$ et ***à valeurs réelles***. Nous verrons ultérieurement comment ces résultats peuvent être (ou non) étendus aux fonctions à valeurs complexes.

IV.1. Extremums

Définition 17.26 (Extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I.

- On dit que f admet un ***minimum local*** m en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap V(a)$.
- On dit que f admet un ***maximum local*** M en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap V(a)$.

Proposition 17.27 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point a intérieur à I. Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$ (la réciproque est fausse).

Démonstration

On suppose par exemple que $f(a)$ est un maximum local. On écrit le taux d'accroissement à gauche de a :
pour $x < a, x \in I \cap V(a)$, $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ car $f(a)$ est un maximum local. Par passage à la limite, $f'_g(a) \geqslant 0$.
De même, $f'_d(a) \leqslant 0$. Comme $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$ puisque f est dérivable en a, on a $f'(a) = 0$.
Le cas où $f(a)$ est un minimum local se traite de façon similaire ou bien on applique ce que l'on vient de montrer à $-f$.

Remarque

- Si a est une borne de I, on peut avoir un extremum pour f en a et $f'(a) \neq 0$. Par exemple, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ admet $f(1) = 1$ comme maximum et pourtant $f'(1) = 2$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est dérivable, $f'(0) = 0$, mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local.

IV.2. Théorème de Rolle

Théorème 17.28 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un minimum m et un maximum M. Si $m = M$, alors f est constante et donc $f'(c) = 0$ pour tout point c de $]a, b[$. Si $m < M$, puisque $f(a) = f(b)$ et f continue, un au moins de ces extremums est atteint en un point c de $]a, b[$. En ce point c, on a nécessairement $f'(c) = 0$ d'après la proposition précédente (figure 17.1).

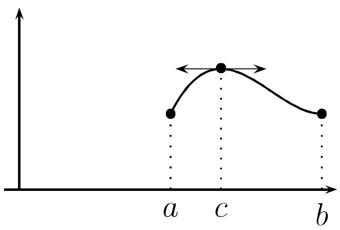


FIGURE 17.1 – Théorème de Rolle

Remarque

- Le théorème de Rolle, comme le théorème des valeurs intermédiaires, est un théorème d'existence. Il précise que sous certaines conditions la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois. Mais il ne donne ni la valeur du (ou des) points où cette dérivée s'annule, ni leur nombre exact.
- On notera bien qu'il n'est pas nécessaire pour f d'être dérivable en a et en b.
- La conclusion du théorème de Rolle est en défaut, si l'on supprime une seule des trois hypothèses.
  - ⋆ La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $0 \leqslant x < 1$ et $f(1) = 0$ est dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 0$. Mais f n'est pas continue en 1 et la dérivée de f sur $]0, 1[$ qui est constante à 1 ne s'annule pas.
  - ⋆ La fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$. Mais f n'est pas dérivable en 0 et f', lorsqu'elle existe, ne prend que les valeurs -1

et 1, donc ne s'annule pas.

⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. Mais $f(0) \neq f(1)$ et $f' = 1$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

Ex. 17.10 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-3)(x-1)x(x+2)(x+4)$. Montrer que f' possède quatre racines distinctes.

Cor. 17.10

On utilise le théorème de Rolle sur les segments $[-4;-2]$, $[-2;0]$, $[0;1]$ et $[1;3]$. f s'annulant aux bornes de chacun de ces intervalles et étant dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, f' s'annule sur $]-4;-2[$, $]-2;0[$, $]0;1[$ et $]1;3[$ et possède donc quatre racines distinctes.

Ex. 17.11 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2.$$

Cor. 17.11

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + f'(x)(b-x) + A(b-x)^2$ où $A \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $g(b) = g(a)$. L'application g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Ainsi $g'(c) = (f''(c) - 2A)(b-c) = 0$ équivaut à $A = \frac{f''(c)}{2}$ puisque $b - c \neq 0$. L'égalité $g(b) = g(a)$ donne la formule

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2.$$

IV.3. Théorème des accroissements finis

Théorème 17.29 (Théorème des accroissements finis)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration

Le théorème est illustré par la figure 17.2. La fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui s'écrit aussi $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Théorème 17.30 (Utilisation : primitivation d'un développement limité)

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

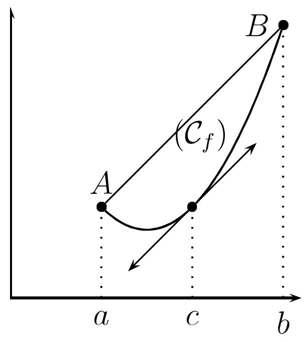


FIGURE 17.2 – Théorème des accroissements finis

Démonstration

$f'(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = Q'(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ d'où $f'(x) - Q'(x) = x^n\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur le segment $[0;x]$ (ou sur le segment $[x;0]$ si x est négatif), il existe $\theta\in]0;1[$ tel que

$$f(x) - Q(x) - f(0) + Q(0) = x \times \theta^n x^n \epsilon(\theta x)$$

Or $Q(0) = 0$ donc

$$f(x) = f(0) + Q(x) + x^{n+1}\epsilon_1(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$$

Remarque

L'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point $C(c, f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Ex. 17.12 Établir que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Cor. 17.12

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, x+1]$. Il existe $c\in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x) = \frac{1}{c}$. Comme $0 < x < c < x+1$, on a en prenant l'inverse $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. La double inégalité $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ s'en déduit. Il est important de savoir qu'il existe c dans l'ouvert $]x, x+1[$ pour obtenir des inégalités strictes.

Corollaire 17.31 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)

Si l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x\in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $b - a > 0$, $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ implique $m(b - a) \leqslant f'(c)(b - a) \leqslant M(b - a)$.

Ex. 17.13 Donner une valeur approchée rationnelle de $\sqrt[4]{80}$ et majorer l'erreur commise.

Cor. 17.13

$a = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{81 - 1} = 3\sqrt[4]{1 - \frac{1}{81}}$. Or $f : x \mapsto \sqrt[4]{1 - x}$ est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{81}\right]$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-1}{4(1 - x)^{\frac{3}{4}}}$ qui est négative et décroissante sur cet intervalle. Pour $x \in \left[0; \frac{1}{81}\right]$, $\frac{-1}{4} \geq f'(x) \geq \frac{-27}{4a^3}$. On en déduit, en utilisant l'inégalité des accroissements finis (version réelle), que $\frac{-3}{4 \times 81} \geq a - 3 \geq \frac{-1}{4a^3}$. On obtient donc pour a la valeur approchée $a \approx 3 - \frac{1}{4 \times 27} = \dfrac{323}{108}$. Cette valeur approchée est une valeur par excès, à la précision de
$\frac{1}{4a^3} - \frac{3}{4 \times 81} = \frac{a}{320} - \frac{1}{4 \times 27} \leq \frac{323}{320 \times 108} - \frac{320}{108 \times 320} \leq 10^{-4}$.

IV.4. Variation, extremums et dérivabilité

Proposition 17.32 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. La fonction f est constante sur I ***si et seulement si*** sa dérivée f' est nulle sur $\mathring{I}$.

Démonstration

La condition est clairement nécessaire, on montre qu'elle est suffisante.
On suppose que $f' = 0$ sur $\mathring{I}$. Soit x et y dans I avec $x < y$. Comme f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, on applique le théorème des accroissements finis à f sur le segment $[x, y]$. Il existe donc $c \in]x, y[\subset \mathring{I}$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, ce qui implique que $f(x) = f(y)$ car $f'(c) = 0$.

Ex. 17.14 Soit $g : x \mapsto \text{Arccos}\,(2x^2 - 1)$.

1) Ensemble de définition et continuité de g.
2) Ensemble de dérivabilité de g.
3) Calcul de g'.
4) Simplifier, pour $x \in [-\pi; \pi]$, l'expression $g(\cos(x))$.

Cor. 17.14

1) $g(x)$ est définie si et seulement si $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$.
   Or $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$.
   Donc g est définie sur $[-1; 1]$.
   De plus, sur cet intervalle, c'est une fonction continue comme composée de deux fonctions continues.
2) g est dérivable si et seulement si $-1 < 2x^2 - 1 < 1$.

En reprenant les calculs de la question précédente, on obtient donc que g est dérivable si et seulement si $0 < x^2 < 1$, c'est-à-dire sur $]-1;0[\cup]0;1[$.

3) $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[,\ g'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}$.

   Donc $g'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} = \dfrac{2x}{|x| \times \sqrt{1-x^2}}$.

   Donc, si $x > 0$, $g' = 2\operatorname{Arccos}'$

   et, si $x < 0$, $g' = -2\operatorname{Arccos}'$

4) Soit $x \in [-\pi;\pi]$.

   $g(\cos(x)) = \operatorname{Arccos}(2\cos^2(x)-1) = \operatorname{Arccos}\big(\cos(2x)\big)$.

   Or $\operatorname{Arccos}(cos(u)) = u$ ***si et seulement si*** $u \in [0;\pi]$**.**

   Donc $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], g(x) = 2x$.

   Sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ donc $0 \leqslant 2\pi - 2x \leqslant \pi$.

   Donc $g(x) = \operatorname{Arccos}\big(\cos(2x)\big) = \operatorname{Arccos}\big(\cos(-2x)\big) = \operatorname{Arccos}\big(\cos(2\pi-2x)\big) = 2\pi - 2x$ par parité et périodicité.

   On démontre de même que :

   Sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $g(x) = -2x$.

   Sur $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = 2x + 2\pi$.

Proposition 17.33 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I.

Démonstration

Reprendre exactement la démonstration précédente avec la différence que $f'(c) \geqslant 0$ dans le premier cas et $f'(c) \leqslant 0$ dans le deuxième.

Voici un corollaire qui complète la proposition 17.27.

Proposition 17.34 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point intérieur à I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Démonstration

On considère $\alpha > 0$, tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$ et par exemple que $f' \leqslant 0$ sur $]a-\alpha, a]$ et $f' \geqslant 0$ sur $[a, a+\alpha[$. L'application f est donc croissante sur $]a-\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, a+\alpha[$, ceci prouve que $f(a)$ est le maximum de f restreinte à l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$. Si l'on suppose l'inverse sur le signe de la dérivée, on obtient que $f(a)$ est un minimum local.

Ex. 17.15 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geqslant x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 17.15

L'inégalité précédente est équivalente à $x \ln a \geqslant a \ln x$ puisque la fonction ln est croissante, ou aussi à $\frac{\ln a}{a} \geqslant \frac{\ln x}{x}$. Il s'agit donc de trouver, s'il existe, le maximum de la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ est nul seulement pour $x = e$. On a $f' > 0$ sur $]0, e[$, $f' < 0$ sur $]e, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi, f admet un unique maximum, obtenu pour $a = e$.

On en déduit que $e^\pi \geqslant \pi^e$. L'inégalité est même stricte puisque $\pi \neq e$ et que le maximum de f est unique.

Proposition 17.35 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ avec f' de signe constant sur $\mathring{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Supposons f croissante la démonstration étant similaire dans le cas décroissant.

Si f est strictement croissante, alors f n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide, donc sa dérivée n'est pas nulle sur un tel intervalle. On établit la réciproque par contraposée.

Si f n'est pas strictement croissante, il existe deux points x et y dans I tels que $x < y$ et $f(y) \leqslant f(x)$. La restriction de f à $[x, y]$ est donc constante puisque f est croissante. La dérivée de f est alors nulle sur l'intervalle ouvert non vide $]x, y[$.

Ex. 17.16 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.16

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$, donc f est croissante. Par ailleurs, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide, f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.17 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$.

Cor. 17.17

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ dont le signe paraît difficile à étudier. Étudions les variations de f'.

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x \geqslant 0$ et f'' s'annule seulement pour $x = 0$, donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f'(0) = 0$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

IV.5. Limite de la dérivée

Proposition 17.36 (Limite de la dérivée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration

Soit x un point de $I \backslash \{a\}$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis entre a et x puisque f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. Il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Par encadrement $(a < c_x < x)$, $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$.
D'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité ***lorsque sa dérivée possède une limite en ce point***. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

Ex. 17.18 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.18

1) Par composition des limites, $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est prolongeable par continuité par 0 en 0.
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée. De plus
$\forall x \neq 0, f'(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ et $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (en écrivant $u = \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ si ce n'est pas clair). Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de dérivée 0.
3) La question précédente permet d'affirmer immédiatement que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$... on recommence !
$\tilde{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée
$\tilde{f}''(x) = \dfrac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - \dfrac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}(2 - 3x^2)}{x^6}$ qui tend à nouveau vers 0 en 0 par croissance comparée. Donc $\tilde{f}'$ est dérivable en 0, de dérivée continue, donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur

$\mathbb{R}$.

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 8 sur les suites, le chapitre 14 sur la continuité et le TD 6 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle I stable par f*** c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est décroissante***.

  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 8.51 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 14.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f. Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a; b]$ où a ***et*** b ***sont deux points fixes de*** f ***tels que*** $a < b$ est stable par f.
  En effet, $\forall x \in [a; b], a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b$.
- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- ***Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une repré-***

sentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par f.

Méthode : Monotonie *de la suite*

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \mathrm{id}$:
  - ⋆ si g est ***positive sur l'intervalle stable par f considéré***, la suite est croissante ;
  - ⋆ si g est ***négative sur l'intervalle stable par f considéré***, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.

Les points fixes de f sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !

Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.

De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 17.31) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».

Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.

Ex. 17.19 Nous avons déjà étudié (exercice 14.22, TD d'informatique) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$ et nous avons montré que

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.

En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

Cor. 17.19

Notons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{x + \frac{r}{x}}{2}$ de sorte à ce que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On souhaite montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.
Remarquons tout d'abord que $f(\sqrt{r}) = \sqrt{r}$ de sorte à ce que cet encadrement se réécrit :

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant f(u_n) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$$

Comme on sait que u est décroissante à partir du rang 1 et converge vers $\sqrt{r}$, ceci revient à montrer que

$$\forall x \geqslant \sqrt{r}, 0 \leqslant f(x) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(x - \sqrt{r}\right)^2$$

Étudions f : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2}$. Donc
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant r \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{r}$ car $x > 0$.
Donc f est décroissante sur $\left]0; \sqrt{r}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{r}; +\infty\right[$.
Ceci permet d'affirmer immédiatement que $\forall x \geqslant \sqrt{r}, 0 \leqslant f(x) - f(\sqrt{r})$.
Il reste à démontrer la partie droite de l'encadrement.
On peut y voir une expression ressemblant à l'inégalité des accroissements finis.
Posons $a = \sqrt{r}$, $b = x$, sur le segment $\left[\sqrt{r}; x\right]$, f est continue et dérivable et sa dérivée $f'(u) = \dfrac{1 - \frac{r}{u^2}}{2}$ est croissante (car $u \mapsto \dfrac{-1}{u^2}$ est croissante). Donc f' est majorée par $f'(x) = \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
$f(x) - f(\sqrt{r}) \leqslant \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} \times \left(x - \sqrt{r}\right)$.
Or $\dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} \times \left(x - \sqrt{r}\right) = \dfrac{x^2 - r}{2x^2} \times \left(x - \sqrt{r}\right) = \dfrac{x + \sqrt{r}}{2x^2} \times \left(x - \sqrt{r}\right)^2$.
Il suffit donc de montrer que pour $x \geqslant \sqrt{r}$, $\dfrac{x + \sqrt{r}}{2x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}$.
Cette dernière inégalité est équivalente à $0 \leqslant x(x - \sqrt{r}) + x^2 - r \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x - \sqrt{r}\right)\left(2x + \sqrt{r}\right)$ qui est vraie.
On a donc bien démontré que

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant f(u_n) - f(\sqrt{r}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$$

La fin est alors simple : $r > 1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{r}} < 1$ d'une part, et
si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près, alors $u_n - \sqrt{r} \leqslant 10^{-k}$ par définition.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant 1 \times \left(10^{-k}\right)^2$ ce qui garantit que u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

V.3. Fonctions lipschitziennes

Définition 17.37 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x;y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Proposition 17.38

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité 17.31 des accroissements finis.

Proposition 17.39

Si $I = [a;b]$ est un segment et si $f : I \to I$ est continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration

Existence : on l'a démontrée en TD. Elle vient de la continuité de f : on considère la fonction $g = f - \mathrm{id}$. g est continue et $g(a) = f(a) - a \geqslant a - a = 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f([a;b]) \subset [a;b]$ par hypothèses.
Donc g s'annule sur $[a;b]$.
Unicité : on la démontre par l'absurde. Supposons que f ait deux points fixes u et v dans $[a;b]$. On aurait alors :
$|f(u) - f(v)| = |u - v| \leqslant k|u - v| < |u - v|$ ce qui est absurde.

Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k-lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f.