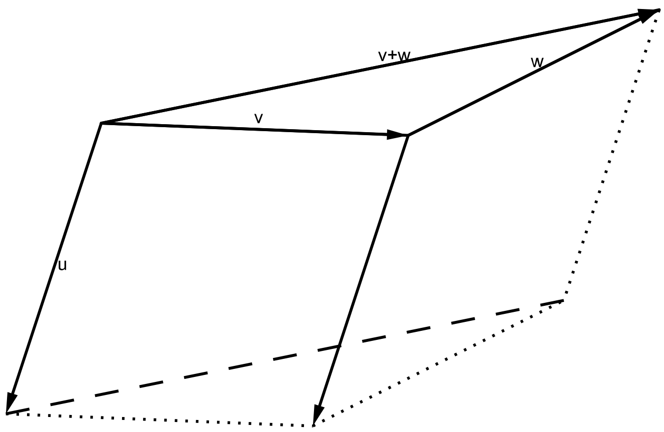
Déterminant

Ex. 21.1 Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_1$ et $BCEF$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_2$. Quelles sont les valeurs possibles de l'aire du parallélogramme $AFED$?

La notion de déterminant est une généralisation des notions d'aire et de volume. Comme dans les précédents chapitres d'algèbre, nous allons le définir ***par ses propriétés opératoires***. Il est cependant important de comprendre que ces propriétés résultent de l'origine géométrique de cette notion. Pour comprendre cela, intéressons-nous à la notion d'aire.
Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de E. Notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire ***algébrique*** (c'est-à-dire que cette aire peut-être positive ou négative) du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.



- ***L'aire est bilinéaire***
  $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$: le parallélogramme formé sur les vecteurs u et $v + w$ a pour aire la somme des aires des parallélogrammes formés sur les vecteurs u et v d'une part et u et w d'autre part
  $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$: on retrouve ici que l'aire envisagée ici doit être algébrique
- ***L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle*** : $\mathcal{A}(u, u) = 0$
- ***Ceci a pour conséquence que l'aire est antisymétrique*** :
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) = 0$ d'une part et
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) = \mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(v, v) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u)$ d'autre part, d'où l'on déduit que
  $\mathcal{A}(u, v) = -\mathcal{A}(v, u)$

Le but de ce chapitre est de montrer que cette notion, si on l'envisage comme nous venons de le faire au travers de ses propriétés opératoires, se généralise non seulement aux calculs de

volumes de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais aussi aux ***espaces de dimensions supérieures*** : c'est la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Nous verrons ensuite les propriétés opératoires de cette notion, conduisant notamment à un certain nombre de méthodes de calcul pour le déterminant d'une matrice carrée. Enfin, nous verrons que cette notion se généralise davantage encore en définissant le déterminant des endomorphismes en dimension finie.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Déterminant

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée de taille n	
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : • f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; • f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; • $f(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors-programme. On motivera géométriquement cette définition pour $n \in \{2; 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice carrée A.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.	
Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Application : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.	La formule de changement de bases est hors-programme.
Caractérisation des bases. Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes et des colonnes.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. Comatrice hors-programme.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Traduction pour les déterminants d'endomorphisme des propriétés vues pour le déterminant d'une matrice.	

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

II.1. Théorème-définition

Théorème 21.1

Il existe une ***unique*** application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à ***chaque colonne de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|\lambda C_i + \mu C_i'|...|C_n\right) = \lambda f\left(C_1|..|C_i|...|C_n\right) + \mu f\left(C_1|..|C_i'|...|C_n\right)$
- f est antisymétrique (ou encore alterné) par rapport aux ***colonnes de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -f\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right)$
- $f(I_n) = 1$

Démonstration hors programme

Notation

Cette application est notée det.

Remarque

La dernière condition revient en fait à se donner une unité d'aire (pour les matrices 2×2), de volume (pour les matrices 3×3) ou d'***hyper-volume*** pour les matrices carrées quelconques.

II.2. Propriétés

Propriété 21.2

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration

Supposons que les colonnes C_i et C_j $(i \neq j)$ sont égales.
Alors $\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -\det\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right) = -\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right)$ puisque les deux xolonnes sont égales.
Donc $2\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = 0$, c'est-à-dire $\det\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = 0$.

Corollaire 21.3

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Démonstration

Supposons que la colonne C_i soit nulle : $C_i = 0_{n,1}$.
Soit C une matrice colonne quelconque : $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors :
$\det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \det(C_1|..|C - C|...|C_n)$ puisque $C_i = 0_{n,1}$.
Donc $\det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \det(C_1|..|C|...|C_n) - \det(C_1|..|C|...|C_n) = 0$ par linéarité.

Propriété 21.4

Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration

Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.
$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1|..|\lambda C_i|...|\lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1|..|C_i|...|C_n) = \lambda^n \det(A)$ par linéarité.

Propriété 21.5

Ajouter à une colonne d'une matrice ***une combinaison linéaire des autres colonnes*** ne change pas la valeur de son déterminant.

Démonstration

On le montre pour la première colonne.
$\det(C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_n C_n|...|C_i|...|C_n) = \det(C_1|...|C_i|...|C_n) + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(C_i|...|C_i|...|C_n)$.
Or tous les déterminants intervenant dans la dernière somme sont nuls puisque deux de leurs colonnes sont identiques.
Donc $\det(C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_n C_n|...|C_i|...|C_n) = \det(C_1|...|C_i|...|C_n)$.

Ex. 21.2 (Cor.) Calculer les déterminants suivants :
$A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad C = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Corollaire 21.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

On le démontre par récurrence :
Initialisation : si $n = 1$
$\det(a) = a \det(1) = a$ est bien égal au produit du (seul !) coefficient diagonal de la matrice.
Comme ce cas n'est pas très parlant, on traite aussi le cas où $n = 2$.

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c\end{pmatrix}$ par linéarité par rapport à la première colonne.

Donc $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c\end{pmatrix}$ en effectuant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - bC_1$ qui laisse le déterminant inchangé d'après la propriété 21.5.

Enfin, à nouveau par linéarité, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} = ac\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = ac$ car $\det(I_2) = 1$ par définition.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné et que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (la démonstration est similaire pour les matrices triangulaires inférieures).

$\det(A) = a_{1,1}\det\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1}\end{pmatrix} = a_{1,1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1}\end{pmatrix}$ en effectuant les combinaisons linéaires $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1$ qui laissent le déterminant inchangé.

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Ex. 21.3 (Cor.)

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2|C_2 - C_3|...|C_{n-1} - C_n|C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n\end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$.

II.3. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$;
8) $\mathrm{rg}(A) = n$;
9) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

II.4. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 21.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre.
Pour démontrer la propriété il suffit donc de démontrer que

1) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est libre alors $\det(A) \neq 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ libre, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = n$.
Alors l'algorithme du pivot de Gauss - sur les colonnes de A - appliqué à A conduit à une matrice diagonale possédant n pivots.
C'est-à-dire à une matrice diagonale dont aucun coefficient diagonal n'est nul.
Or les opérations élémentaires utilisées lors de l'algorithme du pivot de Gauss sont du type :
   - $C_i \leftrightarrow C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par -1 ;
   - $C_i \leftarrow \lambda C_i + \mu C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par $\lambda \neq 0$.

   Le déterminant de A est donc non nul (puisque produit de scalaires non nuls).
2) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est liée alors $\det(A) = 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ liée. L'un des vecteurs colonnes est donc combinaison linéaire des autres vecteurs, par exemple $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$.
Donc $\det(A) = \det\left(C_1|...|C_{n-1}|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i\right) = \det\left(C_1|...|C_{n-1}|0_{n,1}\right) = 0$ d'après la propriété 21.5.

Ex. 21.4 (Cor.)

1) Calculer $\det \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.
2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\mathrm{Ker}(A_x)$ et $\mathrm{rg}(A_x)$.

II.5. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 21.8

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$*** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 21.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de la propriété précédente.
En effet, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si elle est libre (n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n).
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est de rang n, c'est-à-dire inversible.
Et le théorème précédent garantit que cette dernière propriété équivaut à $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

II.6. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 21.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Considérons les deux applications $\phi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(AB)$ et $\psi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)\det(B)$.
Ces deux applications sont linéaires par rapport à chacune des colonnes de la variable et antisymétriques. De plus, $\phi(I_n) = \psi(I_n) = \det(A)$.
Si A n'est pas inversible, AB non plus et $\phi = \psi$.
Sinon, par unicité du déterminant, on a encore $\phi = \psi = \det(A)\det$.

Corollaire 21.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $AA^{-1} = I_n$ donc $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$.
Donc $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

II.7. Déterminant de la transposée

Propriété 21.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Démonstration

On utilise la décomposition ER de A.
On a alors : $\det(A) = \det(ER) = \det(E)\det(R)$ et $\det\left({}^tA\right) = \det\left({}^tER\right) = \det\left({}^tR\right)\det\left({}^tE\right)$.
Si R n'est pas inversible, alors $\det\left({}^tA\right) = \det(A) = 0$.
Si R est inversible, alors c'est une matrice diagonale donc $R = {}^tR$ et $\det(R) = \det\left({}^tR\right)$.
Il suffit alors de vérifier que le déterminant des matrices d'opérations élémentaires est égal au déterminant de leur transposée (laissé en exercice).

Corollaire 21.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

II.8. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2 \\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 21.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Démonstration hors programme

Ex. 21.5 (Cor.) Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .

2) Développement par rapport à la deuxième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .

3) Développement par rapport à la troisième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .

4) Développement par rapport aux lignes :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ =. . . . .

5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant

le schéma $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 21.6 (Cor.) Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.

III. Déterminant d'un endomorphisme

III.1. Définition

Théorème 21.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors
$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 21.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

III.2. Propriétés

Propriété 21.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :
$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

Ex. 21.7 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$.
Calculer $\det \psi$.

Corrections

Cor. 21.2 : Notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$A = \det(u, u + v) = \det(u, u) + \det(u, v) = 0 + 1$ car $\det(u, v) = \det(I_2) = 1$.
$B = \det(u + 3v, 2u + 4v) = \det(u + 3v, -2v)$ en effectuant $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$.
Donc $B = -2\det(u, v) - 6\det(v, v) = -2$.

Enfin,
$C = \det(au+cv, bu+dv) = ab\det(u,u) + ad\det(u,v) + cb\det(v,u) + bd\det(v,v) = ad - bc.$

Cor. 21.3 :

1) $$\begin{aligned}\det(C_1 - C_2, ..., C_{n-1} - C_n, C_n - C_1) &= \det\left(C_1 - C_2, ..., C_{n-1} - C_n, \sum_{k=1}^{n} C_k - \sum_{k=1}^{n} C_k\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Les deux déterminants sont égaux si et seulement si A est non inversible.

2) On utilise la multilinéarité du déterminant :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} &= n\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & 1 \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}\\ &= n\det\begin{pmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}n!\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} &= a_1\det\begin{pmatrix} 1 & a_1-a_2 & a_1-a_3 & \cdots & a_1-a_n \\ 1 & 0 & a_2-a_3 & \cdots & a_2-a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_3-a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.\\ &= a_1\prod_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\end{aligned}$$

Cor. 21.4 :

1) $$\det\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & x+n-1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & x+n-1 \\ \vdots & & \ddots & x & x+n-1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x+n-1 \end{vmatrix} = (x+n-1)\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc $\det\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix} = (x+n-1)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & x-1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$

2) $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est donc pas inversible pour $x = 1$ et $x = 1 - n$.

3) $\text{rg}(A_1) = 1$ puisque toutes les colonnes de la matrices sont identiques.
Donc $\dim \text{Ker}(A_1) = n - 1$.
Or les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont tous dans le noyau et forment une famille libre.
Donc $\text{Ker}(A_1) = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$.
Pour $x = 1 - n$, le calcul de $\text{Ker}(A_{n-1})$ conduit au système :
$\begin{cases} (1-n)u_1 + & u_2 + & ... + & u_n & = & 0 \\ u_1 + & (1-n)u_2 + & ... + & u_n & = & 0 \\ & & ... & & & \\ u_1 + & u_2 + & ... + & (1-n)u_n & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = u_2 = ... = u_n$
en faisant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$. Donc

$$\text{Ker}(A_{1-n}) = \text{Vect}((1; 1; ...; 1))$$

est de dimension 1.
Donc $\text{rg}(A_{1-n}) = n - 1$ d'après le théorème du rang.

Cor. 21.5 : En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\det(M_{n+2}) = (a+b)\det(M_{n+1}) - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Donc $\det(M_{n+2}) = (a+b)\det(M_{n+1}) - ab\det(M_n)$.
On calcule $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$ et on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
La résolution conduit alors à $\det(M_n) = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$ lorsque $a \neq b$ et $\det(M_n) = (n+1)a^n$ lorsque $a = b$.

Cor. 21.6 : $D_2(X) = (1 + X^2)^2 - X^2 = 1 + X^2 + X^4$.
$D_3(X) = (1 + X^2)^3 - 2(1 + X^2)X^2 = 1 + X^2 + X^4 + X^6$.
On conjecture donc que $D_n(X)$ est un polynôme de degré $2n$, plus particulièrement que $D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$.
Pour le montrer, on développe suivant la première colonne et on obtient que $D_{n+2}(X) = (1 + X^2)D_{n+1}(X) - X^2 D_n(X)$.

On fait alors une démonstration par récurrence double :
l'***initialisation*** est faite aux rangs 2 et 3.
Hérédité : supposons que pour $n \geqslant 2$ donné, $D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ et $D_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} X^{2k}$.
Alors

$$\begin{aligned} D_{n+2}(X) &= (1+X^2)D_{n+1}(X) - X^2 D_n(X) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} X^{2k} + \sum_{k=1}^{n+2} X^{2k} - \sum_{k=1}^{n+1} X^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+2} X^{2k} = \sum_{k=0}^{n+2} X^{2k} \end{aligned}$$

les autres termes s'annulant.
Conclusion : la propriété est initialisée aux rangs 2 et 3 et héréditaire à partir de ces rangs, donc par récurrence double,

$$\forall n \geqslant 2, D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$$

En particulier, il s'agit bien d'un polynôme de degré $2n$.

Cor. 21.7 : Commençons par traiter le cas $n = 2$.
En notant $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$\psi(E_{1,1}) = E_{1,1}$
$\psi(E_{1,2}) = E_{2,1}$
$\psi(E_{2,1}) = E_{1,2}$
$\psi(E_{2,2}) = E_{2,2}$

Donc la matrice de ψ dans la base canonique est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\det(\psi) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

Le cas général procède de la même idée : en écrivant la matrice de ψ dans la base canonique, on a
$\psi(E_{i,i}) = E_{i,i}$ (il y aura un coefficient 1 diagonal dans cette colonne)
$\psi(E_{i,j}) = E_{j,i}$ pour $j \neq i$.
Dans le calcul du déterminant de ψ, on devra donc échanger les colonnes correspondant aux vecteurs de base $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ pour se ramener à la matrice identité, ceci pour tous les couples (i,j) où $i < j$. Or il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples de cette sorte.
Donc $\det(\psi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.