Maths - DS n°5 - Lundi 11 mai, 2 heures

EV, matrices, fonctions, suites

Devoir non surveillé à distance. Il ne comptera pas dans la moyenne. De toutes façons, il n'y aura pas de moyenne de maths et d'info au second semestre.
Le but de ce devoir est simplement :
- pour vous, de vous permettre de vous jauger ;
- pour moi, de voir si les fondamentaux sont acquis.

Exercices

Exercice 1.

Soit n un entier naturel ***supérieur ou égal à 3***. On note N_n - ou plus simplement N - la matrice

$$N_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1) Écrire la matrice N_3.
   Dans les questions suivantes - à l'exception de la dernière question - on considère que $n = 3$.
2) Calculer $\operatorname{rg}(N)$.
3) Donner une base de $\operatorname{Im} N$.
4) Que vaut $\dim \operatorname{Ker} N$?
5) Donner une base de $\operatorname{Ker} N$.
6) Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à N. On note $\mathcal{C} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   a) Que vaut $\phi(e_1)$?
   b) Que vaut $\phi(e_n)$?
   c) Soit $k \in [\![2; n-1]\!]$. Que vaut $\phi(e_k)$?
   d) Que vaut $\phi \circ \phi(e_1)$?
   e) Que vaut $\phi \circ \phi \circ \phi(e_1) = \phi^3(e_1)$?
   f) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\phi^p(e_1)$?
   g) Déduire des questions précédentes une expression de N^p.

7) Refaire les questions 2) à 6) pour $n \geqslant 3$ entier quelconque.

Exercice 2.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \dfrac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)}{x} \end{cases}$.

On ne demande pas de justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) Le code suivant permet de représenter graphiquement f :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X= np.linspace(-3,3,2000)
f=lambda x:(np.sqrt(1+x**4)-1)/x
Y=f(X)
plt.plot(X,Y)
```

   Recopier ce code dans Spyder et observer la représentation graphique de f.

2) Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
4) Montrer que le prolongement obtenu à la question précédente est dérivable.
5) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.
6) En effectuant un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$, montrer que f possède deux asymptotes obliques dont on donnera les équations.
7) Montrer (le plus simplement possible) que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

On définit la suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.
2) Montrer que u est strictement croissante.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$.
5) Que peut-on en déduire pour la suite v ?
6) Montrer que u est majorée par $v_1 = 3$.
7) Que peut-on dire de la convergence de la suite u ?