Correction DS n°5

Exercice 1.

1) $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans les questions suivantes - à l'exception de la dernière question - on considère que $n = 3$.

2) $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(N) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.
Cette dernière matrice est réduite par ligne, possède deux pivots, donc $\mathrm{rg}(N) = 2$.

3) $\dim \operatorname{Im} N = \mathrm{rg}(N) = 2$.
Il suffit donc de donner deux vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Im} N$ pour obtenir une base de cet espace.
Or les deux premières colonnes de N, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Im} N$.
Donc $\mathcal{B} = ((1;1;1);(0;1;0))$ est une base de $\operatorname{Im} N$.

4) $\dim \operatorname{Ker} N = 3 - \mathrm{rg}(N) = 1$ d'après la version matricielle du théorème du rang.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Comme de plus $\dim \operatorname{Ker} N = 1$, la famille $\mathcal{F} = ((-1;0;1))$ est une base de $\operatorname{Ker} N$.

6) Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à N. On note $\mathcal{C} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) $\phi(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 = (1;1;1)$ puisque la première colonne de N est $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) De même, $\phi(e_3) = \phi(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$.

c) Enfin, $\phi(e_2) = e_2$ puisque la deuxième colonne de N est $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\phi\circ\phi(e_1)=\phi(e_1+e_2+e_3)=\phi(e_1)+\phi(e_2)+\phi(e_3)$ par linéarité.
Donc $\phi\circ\phi(e_1)=2e_1+3e_2+2e_3=(2;3;2)$.

e) $\phi\circ\phi\circ\phi(e_1)=\phi^3(e_1)=\phi(2e_1+3e_2+2e_3)=2\phi(e_1)+3\phi(e_2)+2\phi(e_3)=(4;7;4)$.

f) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On souhaite calculer $\phi^p(e_1)$.
Les questions précédentes permettent de conjecturer que $\phi^p(e_1)=(2^{p-1};2^p-1;2^{p-1})$.
L'***initialisation est faite***.
Faisons l'***hérédité***.
Supposons que pour $p\in\mathbb{N}^*$ donné, on ait $\phi^p(e_1)=(2^{p-1};2^p-1;2^{p-1})$.
Alors $\phi^{p+1}(e_1)=\phi\left(2^{p-1};2^p-1;2^{p-1}\right)=2^{p-1}\phi(e_1)+\left(2^p-1\right)\phi(e_2)+2^{p-1}\phi(e_3)$ par linéarité.
Donc $\phi^{p+1}(e_1)=(2^p;2^p+2^p-1;2^p)$ en remplaçant $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$ et $\phi(e_3)$ par leurs expressions.
Donc $\phi^{p+1}(e_1)=(2^p;2^{p+1}-1;2^p)$, ce qu'il fallait démontrer.
La propriété est initialisée au rang 1, héréditaire à partir de ce rang, donc

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, \phi^p(e_1)=\left(2^{p-1};2^p-1;2^{p-1}\right)$$

g) ϕ est l'application linéaire canoniquement associée à N.
En notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a donc $N=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.
Donc $N^p=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\phi^p\right)$.
Or $\phi(e_1)=\phi(e_3)$ donc $\phi^p(e_1)=\phi^p(e_3)=(2^{p-1};2^p-1;2^{p-1})$ d'une part,
et $\phi(e_2)=e_2$ donc $\phi^p(e_2)=e_2$ d'autre part.
Donc

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, N^p=\begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 2^p-1 & 1 & 2^p-1 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$$

7) On démontre de même, pour $n\geqslant 3$ entier quelconque, que :

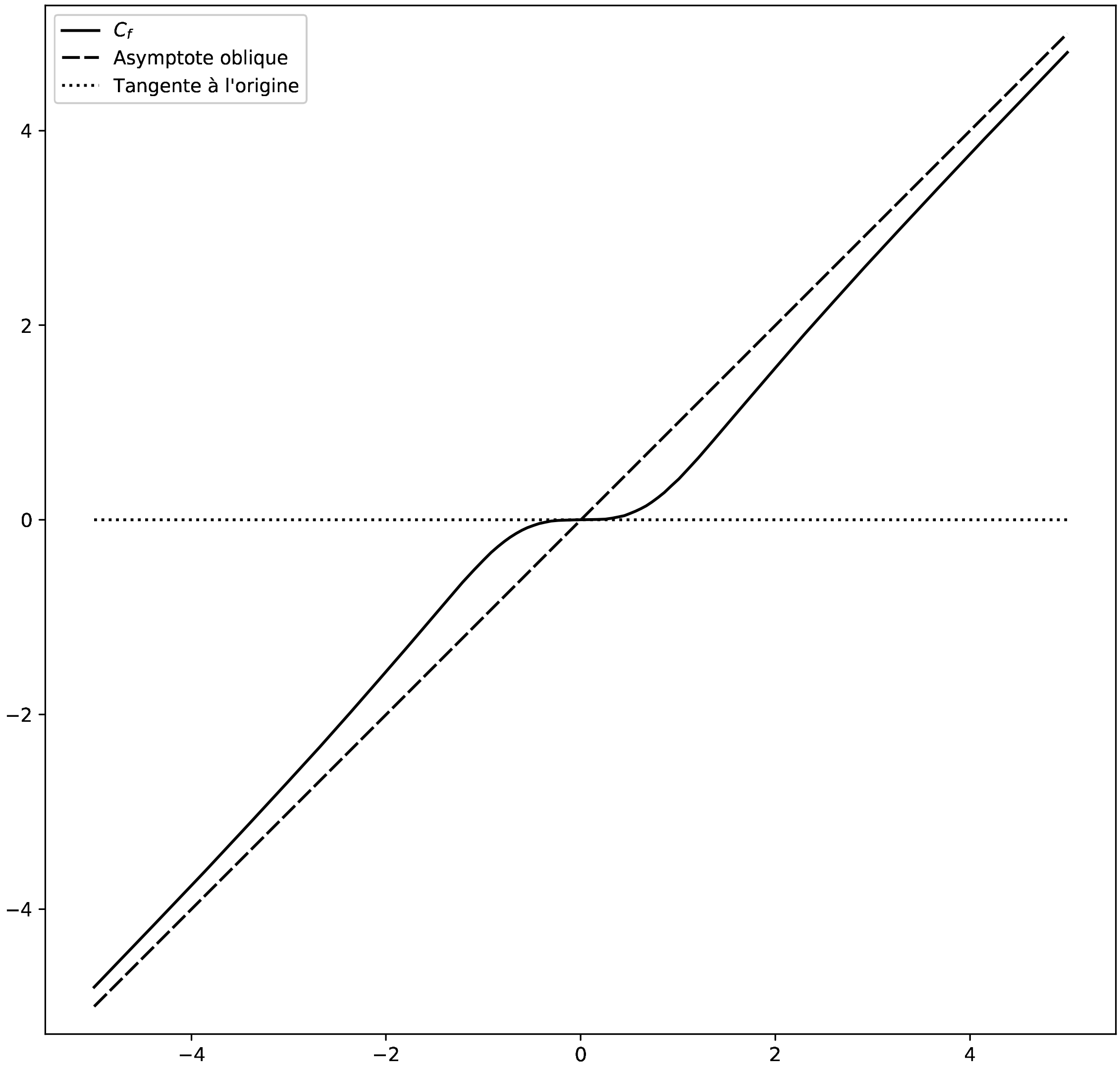
- $\mathrm{rg}(N)=n-1$;
- une base de $\mathrm{Im}\,N$ est donnée par les $n-1$ premières colonnes de N ;
- $\dim\mathrm{Ker}\,N=n-(n-1)=1$;
- une base de $\mathrm{Ker}\,N$ est donnée par le vecteur $(-1;0;...;0;1)\in\mathbb{R}^n$;
- $\phi(e_1)=\phi(e_n)=e_1+e_2+...+e_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e_k$;
- pour $k\in[\![2;n-1]\!]$, $\phi(e_k)=e_k$;
- $\phi\circ\phi(e_1)=2e_1+3e_2+...+3e_{n-1}+2e_n=(2;3;...;3;2)$;
- $\phi^3(e_1)=(4;7;...;7;4)$;
- $\forall p\in\mathbb{N}^*, \phi^p(e_1)=(2^{p-1};2^p-1;...;2^p-1;2^{p-1})$;

- enfin,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, N_n = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2^{p-1} \\ 2^p-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2^p-1 \\ 2^p-1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 2^p-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2^p-1 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 2^p-1 \\ 2^p-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2^p-1 \\ 2^{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 2.

1)



2) $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)}{x} = \dfrac{1+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)-1}{x} = \dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$

3) f possède un développement limité à l'ordre 3 (donc à un ordre supérieur ou égal à 1) en 0. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (terme constant du développement limité).

4) De plus, ce prolongement est dérivable et $f'(0) = 0$ (coefficient du terme de degré 1 du développement limité).

5) L'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ est donc $y = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$ est du signe de x^3 au voisinage de 0.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0^+
et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente en 0^-.

6) Développement asymptotique : on pose $h = \dfrac{1}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\tfrac{1}{h}\right) &= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{h^4}} - 1\right)}{\frac{1}{h}} \\ &= h \times \frac{1}{\sqrt{h^4}}\left(\sqrt{h^4+1} - h^2\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(1 + \tfrac{h^4}{2} + \underset{h \to 0}{o}(h^4) - h^2\right) \\ &= \tfrac{1}{h} - h + \frac{h^3}{2} + \underset{h \to 0}{o}(h^3) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\tfrac{1}{x^3}\right)$.
Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

7) f est une fonction impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0; +\infty[$.
De plus f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (car $f(x) = x + \underset{x \to +\infty}{o}(x)$ au voisinage de $+\infty$).
Donc $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$, et comme f est impaire, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective. La fonction étant continue, ceci équivaut à montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0, et
$\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}x - \sqrt{1+x^4} + 1}{x^2} = \dfrac{x^4 - 1 + \sqrt{1+x^4}}{x^2\sqrt{1+x^4}} \geqslant \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} > 0$.
Donc $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.
f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

On définit la suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

1) $u_0 = 1$.
$u_1 = 2$.
$u_2 = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2) Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
Donc u est strictement croissante.

3) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ par récurrence.
Initialisation :
pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} = 1$.
Hérédité :
Supposons la propriété vérifiée pour un entier n donné.
$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ par hypothèse de récurrence.
Donc $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$, ce qu'il fallait démontrer.
Conclusion : pour tout entier n, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!}$.
Donc
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n(n+1)}{n(n+1) \times (n+1)!} + \frac{n}{n(n+1) \times (n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} \\ &= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1) \times (n+1)!} \end{aligned}$$
Finalement,
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$.

5) La suite v est décroissante, comme conséquence directe de la question précédente.

6) u est croissante, v est décroissante, de plus $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ces deux suites sont adjacentes et le premier terme de v, c'est-à-dire v_1 majore la suite u.

7) Enfin, u est donc convergente, tout comme v, et leurs limites sont égales.