Probabilités

I. Espaces probabilisés

Ex. 19.1 On lance deux fois de suite un dé honnête.

a. Déterminer l'univers Ω ainsi que son cardinal.

b. Trouver le libellé pour l'événement
$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

c. A quelle partie de Ω correspond l'événement B : *"la somme des deux nombres est inférieure strictement à 5"*?

d. Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

Ex. 19.2 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Soient E *« au moins un événement se produit »* et F *« un seul événement se produit »*. Calculer $P(E)$ et $P(F)$.

Ex. 19.3 Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A, B, C trois événements.

a. Montrer que

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = \; & P(A) + P(B) + P(C) \\ & -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & +P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

et que

$$P(A \cup B \cup C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$$

b. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = p$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.
Est-il possible que $p = \dfrac{2}{3}$?

c. On reprend les hypothèses de la question précédente en rajoutant que A, B, C sont deux à deux incompatibles. Calculer la valeur maximale de p et montrer sur un exemple que cette valeur est atteinte.

Ex. 19.4

a. Soient a, b, c, d quatre réels. Montrer que
$\max(a; b) - \min(c; d) = \max(a - c; a - d; b - c; b - d)$.

b. On lance deux dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![2; 12]\!]$, on note $S_2 = n$ l'événement « la somme des deux dés vaut n ».
Montrer que $P(S_2 = n) = \dfrac{\min(6; n-1; 13-n)}{36}$ puis que

$$P(S_2 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![2; 7]\!] & \mapsto & \frac{n-1}{36} \\ n \in [\![7; 12]\!] & \mapsto & \frac{13-n}{36} \end{array} \right.$$

c. On lance trois dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![3; 18]\!]$, on note $S_3 = n$ l'événement « la somme des trois dés vaut n ».

$$\text{Montrer que } P(S_3 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![3; 8]\!] & \mapsto & \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 216} \\ n \in [\![8; 13]\!] & \mapsto & \frac{-n^2+21n-83}{216} \\ n \in [\![13; 18]\!] & \mapsto & \frac{(19-n)(20-n)}{2 \times 216} \end{array} \right.$$

II. Probabilités conditionnelles, indépendance

Ex. 19.5 Dans une région donnée, s'il fait beau le jour J, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $0,2$ et s'il pleut le jour J, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $0,4$ (on suppose que s'il ne pleut pas, il fait beau).

a. On est jeudi et il pleut. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le dimanche suivant ?

b. Monsieur Pabot quitte cette région le dimanche sous la pluie et revient le mercredi sous la pluie. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau le lundi entre-temps ?

Ex. 19.6 En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new look, à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 60% de frites traditionnelles, alors que les Wallons en mangent 80%. L'équipe nationale belge de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Quelle est la probabilité qu'il soit Flamand ?

Ex. 19.7 De la population canadienne, 30% sont Québécois, 28% parlent français et 24% sont Québécois et parlent français. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que cette personne :

a. soit Québécoise **ou** parle français ?

b. ne soit pas Québécoise **et** ne parle pas français ?

c. parle français mais ne soit pas Québécoise ?

Ex. 19.8 (Cor.) Trois ampoules présentant un défaut ont été mélangées à $n \in \mathbb{N}$ autres en bon état.

a. On choisit deux ampoules au hasard. Quelle est la probabilité que toutes les deux soient en parfait état ?

b. On choisit $k \in [\![1; n+3]\!]$ ampoules au hasard. Quelle est la probabilité qu'exactement une d'entre elles soit défaillante ?

Ex. 19.9 ***Problème de Monty Hall***

Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir parmi trois portes. Derrière l'une d'entre elles se trouve un cadeau, derrière les deux autres ne se trouve rien.

Après avoir fait son choix, le présentateur ouvre l'une des deux portes restantes derrière laquelle ne se trouve rien.

Le candidat a alors la possibilité soit de garder la première porte choisie, soit de changer pour l'unique porte restante.

On note A l'événement « le candidat gagne après avoir choisi une porte au hasard et avoir changé de porte à la seconde étape ».

Calculer $P(A)$.

Ex. 19.10 On considère n urnes numérotées (de 1 à n) telles que dans l'urne numéro k se trouve k boules noires et $n-k+1$ boules blanches. On tire successivement deux boules d'une urne choisie au hasard. Quelle est la probabilité que les boules soient blanches :

a. lors d'un tirage sans remise ?

b. lors d'un tirage avec remise ?

Ex. 19.11 On considère une famille comportant n enfants. On note M l'événement *« la famille a des enfants des deux sexes »* et F l'événement *« la famille a au plus une fille »*.

a. Si $n = 2$, les événements M et F sont-ils indépendants ?

b. Même question pour $n = 3$.

Ex. 19.12 On reprend les hypothèses et notations de la question b) de l'exercice 19.3, notamment $P(A \cap B \cap C) = 0$ et on rajoute l'hypothèse que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants.

Montrer que $P(A \cup B \cup C) \leqslant \frac{3}{4}$ puis que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Peut-on avoir $p = \dfrac{1}{2}$?

Ex. 19.13 On considère les points de la droite réelle dont les abscisses sont des entiers relatifs. On part de l'origine et à chaque tour, on se déplace sur l'entier immédiatement à gauche (inférieur) ou immédiatement à droite (supérieur) de façon équiprobable.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de se retrouver à l'origine après $2n$ tours de jeu vaut

$$P = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres impairs}}{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres pairs}}$$

Cor. 19.8 :

a. On définit les événements suivants :
B_i : « on tire une ampoule en bon état lors du i-ème tirage »
D_i : « on tire une ampoule défaillante lors du i-ème tirage »
Il s'agit donc de calculer $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \dfrac{n}{n+3} \times \dfrac{n-1}{n+2} = \dfrac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$ en faisant l'hypothèse d'équiprobabilité pour chaque tirage.

b. On fait l'hypothèse d'équiprobabilité des tirages de k ampoules et on passe par du dénombrement.
Compter les tirages c'est compter les mots de k lettres écrits à l'aide d'au plus trois lettres D et n lettres B.
Or choisir un mot de k lettres écrit avec ***exactement*** une lettre D c'est :
- choisir la position du D : k choix possibles ;
- choisir la lettre D à utiliser : 3 choix possibles ;
- choisir les lettres B à utiliser : A_n^{k-1} choix possibles.

Par ailleurs, il y a A_{n+3}^k mots de k lettres formés avec $n+3$ lettres disponibles.
Donc la probabilité à calculer est :
$P = \dfrac{3k\frac{n!}{(n+1-k)!}}{\frac{(n+3)!}{(n+3-k)!}} = \dfrac{3k(n+3-k)(n+2-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.