Produit scalaire

I. Définition de produits scalaires

Ex. 22.1 On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{C}$ sa base canonique.
On se donne les formes suivantes de $E \times E$:

- $(.|.) : (P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$
- $\langle .|. \rangle : (P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$

a. Montrer que $(.|.)$ et $\langle .|. \rangle$ sont deux produits scalaires sur E.

b. Montrer que $\mathcal{C}$ est une famille orthogonale pour l'un de ces produits scalaires.
Est-elle orthonormale ?

c. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour l'autre produit scalaire.

d. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

e. Calculer P^{-1} (on pourra se montrer astucieux...).

Ex. 22.2 On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on munit E du produit scalaire $(.|.) : (P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1 - t^2}\mathrm{d}t$.

a. Calculer les produits scalaires mutuels des polynômes de la base canonique de E.

b. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de E.

c. Simplifier l'expression de $\sin(\theta)P_i(\cos\theta)$ pour $i \in [\![0; 2]\!]$.

Ex. 22.3 On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on définit les applications $s_n : E \times E \to \mathbb{R}$ qui à deux suites u et v associent

$$s_n(u, v) = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$$

a. Les applications s_n sont-elles des produits scalaires sur E ?

b. On note $F = \left\{ u \in E, \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \in \mathbb{R} \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c. Montrer que $s : \begin{cases} F \times F & \to \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto s(u, v) = \lim_{n \to +\infty} s_n(u, v) \end{cases}$ est bien définie.

d. Montrer que s est un produit scalaire sur F.

e. s peut-elle être prolongée en un produit scalaire sur E ?

Ex. 22.4 Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On donne $\phi : (P, Q) \in E \times E \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.

a. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

b. Expliciter une base orthonormée de E pour ϕ.

II. Normes associées

Ex. 22.5 Soit E un espace euclidien, u_1, u_2, ..., u_n des vecteurs unitaires de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|u_i)^2$$

Montrer que la famille $(u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une base orthonormale de E.

Ex. 22.6 Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme associée $\|.\|$. Montrer que

$$\forall u, v \in E, |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$$

Rappeler le nom de cette inégalité.

III. Orthogonalité

Ex. 22.7 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z + t = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis donner une base orthonormée de F.

Ex. 22.8 Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Ex. 22.9 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soient E_1 et E_2 les parties de E formées des fonctions paires et impaires respectivement.

a. Montrer que quel que soit $f \in E$, il existe un unique couple $(g, h) \in E_1 \times E_2$ tel que $f = g + h$.
b. Écrire la propriété précédente en terme de sous-espaces supplémentaires dans E.
c. Montrer que $E_1^\perp = E_2$.

Corrections