Séries

I. Séries à termes positifs, séries absolument convergentes

Ex. 20.1 Nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $v_n = 3^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 20.2 Calculer, si existence, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)(2k+1)}$.

Ex. 20.3 Déterminer la nature, et éventuellement calculer la somme, de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Ex. 20.4 Nature de la série $\sum n^n e^{-n^2}$.

Ex. 20.5 Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Ex. 20.6 On suppose que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$?

Ex. 20.7 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Pour tout entier n, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.
Comparer la nature des séries de terme général a_n et b_n.

Ex. 20.8 On pose pour tout entier n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t$.
Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

II. Autres séries

Ex. 20.9

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers une limite dont on donnera le signe.

c. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
En déduire un encadrement de H_N.

d. Déduire de la question précédente que $H_N - \ln(N)$ converge. On note γ la limite.

e. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de la suite H.

f. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ex. 20.10 Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin(n)}$.

Ex. 20.11 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

III. Pour aller plus loin

Ex. 20.12 Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

d. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

e. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Ex. 20.13 Soient u et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ v_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \end{array} \right.$$

On note $S = \sum u_n$ et $T = \sum v_n$ les séries associées à ces deux suites.

a. Les séries S et T sont-elles absolument convergentes ?

b. Les séries S et T sont-elles à termes positifs ?

c. Montrer que S est une série convergente.

d. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

e. Soit $w = u - v$. Montrer qu'elle est de signe constant et donner un équivalent (simple) de w_n au voisinage de $+\infty$.

f. Montrer que T est une série divergente.

Ex. 20.14 Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

a. Donner les valeurs de a, b, c pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.

b. Calculer $\sum_{1}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence ou donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en cas de divergence.

Ex. 20.15 Soit u la suite définie par $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right)$ et $S = \sum u_n$.

a. Énoncer ***précisément*** le théorème sur la nature de séries à termes équivalents.

b. Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

c. En déduire que S est une série à termes ***positifs à partir d'un certain rang***.

d. Nature de $\sum u_n$?