Ensembles, applications, dénombrement

I. Ensembles et applications

Ex. 16.1 Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n-1 \end{cases}$

a. Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g.

b. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 16.2 Soit E un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$.
Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{Id}_E$.

Ex. 16.3 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer les propriétés suivantes :

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Que peut-on dire si $g \circ f$ est bijective ? Donner un exemple de fonctions f et g non bijectives telles que $g \circ f$ est bijective.

Ex. 16.4 On considère $f : (n,p) \in \mathbb{N}^2 \mapsto n+p$. Déterminer $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$, $f([\![1;3]\!] \times 3\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Ex. 16.5 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.
Montrer que la famille $\big(A\backslash B; A \cap B; B \backslash A\big)$ est une partition de $A \cup B$.

II. Dénombrement

Ex. 16.6 Quel est le nombre de couples $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que :

a. $i < j$? 3) $i = j^2$?

b. $i \leq j$?

Ex. 16.7 Sur une mappemonde sont représentés plusieurs pays. On dit que deux pays sont voisins s'ils ont une frontière commune.
Montrer que deux pays au moins ont le même nombre de voisins.

Ex. 16.8

a. Le bureau des étudiants de PCSI est composé d'un président, d'un trésorier et d'un Grand Organisateur des Repas de classe.
Il y a 27 élèves. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

b. Les élèves vont faire un repas de classe et s'assoient autour d'une table (unique) ronde.
Deux plans de table sont dits identiques si tous les convives ont les mêmes voisins. Sinon, on les dit différents.
Combien y a-t-il de plans de table (distincts) possibles ?

Ex. 16.9

a. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS, puis du mot EUCLIDE.

b. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE, puis du mot MISSISSIPI.

Ex. 16.10 On considère une assemblée de n personne(s) dont aucune n'est née un 29 février et la liste L de leurs dates de naissance.

a. Quel est le nombre de listes L possibles ?

b. À partir de quelle valeur de n est-on sûr qu'au moins deux personnes différentes sont nées le même jour ?

c. À partir de quelle valeur de n y a-t-il plus de la moitié des cas possibles pour lesquels deux personnes sont nées le même jour ?

Remarque : on peut sortir sa calculatrice (ou Python !) pour répondre à cette question :-)

Ex. 16.11 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

a. Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in [\![0;n]\!]$?

b. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?

c. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$?

d. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

 i. $A \cup B = E$?

 ii. $A \cap B = \emptyset$?

 iii. $(A;B)$ forme une partition de E ?

 iv. $A \cup B \neq E$ et $A \cap B \neq \emptyset$?

Ex. 16.12 ***Permutations de couples*** On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

a. Combien y a-t-il de tables possibles ?

b. Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?

c. Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?

d. Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 16.13 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E.
Par exemple $*$ définie par $0*0=1$, $0*1=1$, $1*0=0$ et $1*1=1$ est une opération interne sur $[\![0;1]\!]$.

a. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?

b. Combien sont commutatives ?

c. Combien possèdent un élément neutre ?

d. Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 16.14 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

a. Analyse du cas $n=3$: on suppose qu'il existe $(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.

 i. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.

 ii. Trouver les valeurs de u_2 et u_3.

b. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.

c. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ex. 16.15 ***Formule d'inversion*** Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier n, $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier n, $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n.

Ex. 16.16 [$*$] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in [\![0;p-1]\!]$ on a :

$$\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$$

b. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.

   i. Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?

   ii. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.

   iii. Calculer $S_{n,2}$.

   iv. Montrer que pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $S_{n,p} = p^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

   v. En déduire que $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c. On note D_n le nombre de bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

   i. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

   ii. En déduire que $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

   (Voir exercice 16.15 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Ex. 16.17 Donner une démonstration combinatoire de la formule du binôme de Newton.

Ex. 16.18 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. En calculant de deux façons différentes le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$, montrer que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

b. Donner une démonstration combinatoire de cette somme.