Maths - Feuille d'exos n° 17

Dérivabilité

I. Dérivabilité

Ex. 17.1 Déterminer $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1}$.

Ex. 17.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la classe de la fonction f définie par $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x\in[-1;1] & \mapsto & (1-x^2)^n \\ x\notin[-1;1] & \mapsto & 0 \end{array}\right.$

Ex. 17.3 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$.

a. Calculer $f^{(n)}(x)$.

b. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Ex. 17.4 ***Arguments des sinus et cosinus hyperboliques***

a. Montrer que $\text{sh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\text{ch} : [0;+\infty[\to[1;+\infty[$ sont bijectives.
On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.

b. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \text{ch}\,(\text{Argsh}\,x) = \sqrt{1+x^2}$.

c. Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[, \text{sh}\,(\text{Argch}\,x) = \sqrt{x^2-1}$.

d. Calculer (en précisant les conditions d'existence) $\text{Argsh}'(x)$ et $\text{Argch}'(x)$.

e. Faire le même travail pour la fonction $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$. Montrer notamment que lorsqu'elle est définie $\text{Argth}\,x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

II. Éléments de calcul différentiel

Ex. 17.5 Trouver les extrema des fonctions suivantes :

- $f : x\mapsto \frac{x-1}{x-2}$ sur $[3;+\infty[$
- $g : x\mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $h : x\mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $[1;2]$
- $k : x\mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ sur $\mathcal{D}_k$

Ex. 17.6 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique qui admet n zéros sur $[0;1[$.
Montrer que f' admet au moins n zéros sur $[0;1[$.

Ex. 17.7 Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Montrer que f définie par $f(x) = x^n+ax+b$ admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Ex. 17.8 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x)$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.9

a. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$.
Montrer que $g(a)\neq g(b)$ et qu'il existe $c\in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

b. Application : soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et $\forall x\in]a;b[, |f'(x)|\leq g'(x)$.
Montrer que $|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$.

Ex. 17.10 Soit $g : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x\neq 0 & \mapsto & x+x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}\right.$.

a. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0)=1$.

b. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel g est croissante.

III. Divers

Ex. 17.11 ***Méthode de Newton***
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f' est à signe constant et que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x coupe l'axe des abscisses en un point dont on précisera l'abscisse $X(x)$.

c. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = X(u_n)$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
Montrer que la suite u est bien définie et est monotone à partir du second terme.

d. En déduire les comportements asymptotiques possibles de la suite u. Préciser sa limite.

Ex. 17.12 ***Règle de l'Hospital*** Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Ex. 17.13 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex. 17.14 (Cor.) [**] On définit les fonctions th, Argsh, Argch et Argth de la même façon qu'à l'exercice 17.4 dont les résultats peuvent être admis ici.
Soient $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et Gd la fonction définie par

$$\mathrm{Gd} : \begin{cases} I & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{cases}.$$

a. Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \operatorname{Argsh}(\tan x) = \operatorname{Argth}(\sin x) = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

c. Calculer Gd' et tracer l'allure de la représentation graphique de Gd.

d. Justifier l'existence de Gd^{-1} et montrer que sur son ensemble de définition $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x)$. Calculer la dérivée de Gd^{-1}.

Corrections

Cor. 17.14 :

a. $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.
Par composition, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b. $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.
On obtient immédiatement la dernière relation en écrivant
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\ln\sqrt{\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. De plus
$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$ ce qui conduit à la première égalité.
Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.
D'où : $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \operatorname{Argsh}(\tan x)$ et
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\right) = \operatorname{Argth}(\sin x)$.

c. $\forall x \in I, \mathrm{Gd}'(x) = (\operatorname{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

d. $\mathrm{Gd}'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{Gd}^{-1})' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$