Étudier cette fonction (ou son prolongement par continuité s'il existe) et tracer sa représentation graphique.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Ex. 14.13 Montrer que l'équation $x^2\cos(x)+x\sin(x)+1=0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 14.14 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 14.15 Soit a et b deux réels strictement positifs, $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)\neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $c\in]0;1[$ tel que $af(0)+bf(1)=(a+b)f(c)$.

Ex. 14.16 [**Problème du moine**]Un moine part de son monastère à $7h00$ du matin et se rend au sommet du Mont Sinaï. Il y arrive à midi.
Il passe la nuit sur place, puis le lendemain repart du sommet à $7h00$, suit exactement le même chemin que la veille et arrive au monastère à midi.
Existe-t-il un endroit se situant sur son chemin où il serait passé à la même heure à l'aller et au retour ?

Ex. 14.17 [**Problème du cycliste**]Un cycliste parcourt 20km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a effectué exactement 10km.

Ex. 14.18 [**] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$.
On note $\alpha=f(1)$.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\alpha x$.

Ex. 14.19 [**] Refaire l'exercice 14.18 en ne supposant plus que la continuité de f en 0.

Ex. 14.20 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que $f<g$.
Montrer qu'il existe $m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x\in[0;1], f(x)+m\leq g(x)$.

IV. Divers

Ex. 14.21 Soit f définie par $f(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

a. Domaine de définition de f ?
b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
c. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Ex. 14.22 Soient $r\in\mathbb{R}_+^*$, $f:x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\dfrac{x+\frac{r}{x}}{2}$ et u la suite définie par $\begin{cases}u_0 & = & 1\\ u_{n+1} & = & f(u_n)\end{cases}$.

a. Montrer que $\left[\sqrt{r};+\infty\right[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\geqslant\sqrt{r}$.
b. Montrer que $g:x\mapsto f(x)-x$ est négative sur $\left[\sqrt{r};+\infty\right[$.
c. En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
e. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

V. Correction

Cor. 14.7 :

a. $x^x = e^{x\ln(x)} = 1+x\ln(x)+\dfrac{x^2\ln^2(x)}{2}+\dfrac{x^3\ln^3(x)}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$ car $x\ln(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ d'une part, et car le terme suivant $\dfrac{x^4\ln^4(x)}{24}$ est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.
De même, comme $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$,