Ensembles, applications, dénombrement

I. Ensembles et applications

Ex. 16.1 (Cor.) Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n-1 \end{cases}$

a. Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g.

b. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 16.2 (Cor.) Soit E un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{Id}_E$.

Ex. 16.3 (Cor.) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer les propriétés suivantes :

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Que peut-on dire si $g \circ f$ est bijective ? Donner un exemple de fonctions f et g non bijectives telles que $g \circ f$ est bijective.

Ex. 16.4 On considère $f : (n,p) \in \mathbb{N}^2 \mapsto n+p$. Déterminer $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$, $f([\![1;3]\!] \times 3\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Ex. 16.5 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Montrer que la famille $\big(A \backslash B; A \cap B; B \backslash A\big)$ est une partition de $A \cup B$.

II. Dénombrement

Ex. 16.6 Quel est le nombre de couples $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que :

a. $i < j$?

b. $i \leq j$?

3) $i = j^2$?

Ex. 16.7 (Cor.) Sur une mappemonde sont représentés plusieurs pays. On dit que deux pays sont voisins s'ils ont une frontière commune.
Montrer que deux pays au moins ont le même nombre de voisins.

Ex. 16.8

a. Le bureau des étudiants de PCSI est composé d'un président, d'un trésorier et d'un Grand Organisateur des Repas de classe.
Il y a 27 élèves. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

b. Les élèves vont faire un repas de classe et s'assoient autour d'une table (unique) ronde.
Deux plans de table sont dits identiques si tous les convives ont les mêmes voisins. Sinon, on les dit différents.
Combien y a-t-il de plans de table (distincts) possibles ?

Ex. 16.9 (Cor.)

a. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS, puis du mot EUCLIDE.

b. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE, puis du mot MISSISSIPI.

Ex. 16.10 (Cor.) On considère une assemblée de n personne(s) dont aucune n'est née un 29 février et la liste L de leurs dates de naissance.

a. Quel est le nombre de listes L possibles ?

b. À partir de quelle valeur de n est-on sûr qu'au moins deux personnes différentes sont nées le même jour ?

c. À partir de quelle valeur de n y a-t-il plus de la moitié des cas possibles pour lesquels deux personnes sont nées le même jour ? Remarque : on peut sortir sa calculatrice (ou Python !) pour répondre à cette question :-)

Ex. 16.11 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

a. Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in [\![0;n]\!]$?

b. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?

c. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$?

d. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

   i. $A \cup B = E$?

   ii. $A \cap B = \emptyset$?

   iii. $(A;B)$ forme une partition de E ?

   iv. $A \cup B \neq E$ et $A \cap B \neq \emptyset$?

Ex. 16.12 ***Permutations de couples*** On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

a. Combien y a-t-il de tables possibles ?

b. Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?

c. Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?

d. Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 16.13 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E.
Par exemple $*$ définie par $0*0=1$, $0*1=1$, $1*0=0$ et $1*1=1$ est une opération interne sur $[\![0;1]\!]$.

a. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?

b. Combien sont commutatives ?

c. Combien possèdent un élément neutre ?

d. Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 16.14 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

a. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.

   i. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.

   ii. Trouver les valeurs de u_2 et u_3.

b. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.

c. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ex. 16.15 (Cor.) ***Formule d'inversion*** Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier n, $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier n, $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n.

Ex. 16.16 [$*$] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in [\![0; p-1]\!]$ on a :

$$\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$$

b. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.

i. Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?

ii. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.

iii. Calculer $S_{n,2}$.

iv. Montrer que pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $S_{n,p} = p^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

v. En déduire que $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c. On note D_n le nombre de bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

i. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

ii. En déduire que $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

(Voir exercice 16.15 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Ex. 16.17 Donner une démonstration combinatoire de la formule du binôme de Newton.

Ex. 16.18 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. En calculant de deux façons différentes le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$, montrer que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

b. Donner une démonstration combinatoire de cette somme.

Corrections

Cor. 16.1 :

a. f est injective mais pas surjective : en effet

- soit n, m tels que $f(n) = f(m)$. Alors $n+1 = m+1$ donc $n = m$: f est injective.
- 0 n'a pas d'antécédent pas f : $f(n) = 0 \Rightarrow n+1 = 0 \Rightarrow n = -1$. Or $-1 \notin \mathbb{N}$.

g est surjective mais pas injective. En effet :

- Soit $m \in \mathbb{N}$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Supposons $n > 0$: $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1$.
  Donc m possède au moins un antécédent par g, c'est $m+1$.
- $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$: $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n$ (car $n+1 > 0$).
Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ qui est bijective.

$f \circ g(n) = f(g(n)) = \left| \begin{array}{lll} f(n-1) = n & \text{si} & n > 0 \\ f(0) = 1 & \text{si} & n = 0 \end{array} \right.$

Notamment, $f \circ g(n) > 0$ pour tout entier n : donc $f \circ g$ n'est pas surjective (0 n'est jamais atteint),
et $f \circ g(0) = 1 = f \circ g(1)$: donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Cor. 16.2 :

- Si p est surjective, alors $\forall y \in E, \exists x \in E, p(x) = y$.
  Soit $y \in E$ et x un antécédent.
  Alors $p(y) = p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x)$ par $p \circ p = p$.
  Donc $p(y) = y$.
  Finalement $\forall y \in E, p(y) = y$ c'est-à-dire $p = \mathrm{Id}_E$.
- Si p est injective, on a $\forall x \in E, p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ et comme p injective, $p(x) = x$. A nouveau $p = \mathrm{Id}_E$.

Cor. 16.3 : Les deux premières propriétés ont été démontrées dans le cours, chapitre 1, exercice 1.24.
Idem pour $g \circ f$ bijective$\Rightarrow$(f injective et g surjective).
Enfin l'exercice 16.1 donne l'exemple demandé.

Cor. 16.7 : ***Numérotons les pays présents sur la carte*** de 1 à n.
Soit $V : k \in [\![1;n]\!] \mapsto V(k)$ qui à un pays (représenté par son numéro) associe son nombre de voisins $V(k)$.

Comme aucun pays n'est son propre voisin, $\operatorname{Im} V \subset [\![0; n-1]\!]$ (le nombre maximum de voisins est $n-1$).
L'idée est de montrer que V ne peut pas être injective, c'est-à-dire qu'il existe $j \neq k$ tels que $V(j) = V(k)$: il existe deux pays qui ont le même nombre de voisins.
Étude de cas :

- si tous les pays ont au moins un voisin, alors $\operatorname{Im} V \subset [\![1; n-1]\!]$: or $\operatorname{Card} [\![1; n]\!] = n$ et $\operatorname{Card} [\![1; n-1]\!] = n-1$ donc V n'est pas injective.
- sinon, il existe un pays qui n'a aucun voisin, donc les autres pays ont au plus $n-2$ voisins.
  Donc $\operatorname{Im} V \subset [\![0; n-2]\!]$: or $\operatorname{Card} [\![1; n]\!] = n$ et $\operatorname{Card} [\![0; n-2]\!] = n-1$ donc V n'est pas injective.

Remarque : cette démonstration n'est valable que si $n \geqslant 2$, ce que l'énoncé affirme puisque sur la mappemonde sont représentés ***plusieurs pays***.

Cor. 16.9 :

a. MATHS est composé de 5 lettres ***distinctes***.
Il y a donc autant d'anagrammes du mot MATHS que de ***permutations de ses lettres***.
Il y a donc $5! = 120$ anagrammes du mot MATHS.
Au contraire, dans EUCLIDE, il y a deux lettres E. Échanger ces deux E ne change pas le mot.
On adopte alors une autre méthode pour compter le nombre d'anagrammes d'EUCLIDE.
Choisir un anagramme d'EUCLIDE, c'est :
   - Choisir la position des deux E parmi sept positions possibles : $\binom{7}{2} =$ 21 positions pour les deux E.
   - ***PUIS*** choisir la position du U : 5 choix restants.
   - ***PUIS*** choisir la position du C : 4 choix restants.
   - ***PUIS*** choisir la position du L : 3 choix restants.
   - ***PUIS*** choisir la position du I : 2 choix restants.
   - ***PUIS*** placer le D dans la seule position restante.

   En tout, il y a donc $5! \times 21 = 2520$ anagrammes du mot EUCLIDE.

b. De la même manière que dans la question précédente :
Choisir un anagramme de BANANE, c'est :
   - Choisir la position des deux A parmi six positions possibles : $\binom{6}{2} =$ 15 positions pour les deux A.
   - ***PUIS*** la position des deux N parmi quatre positions restantes : $\binom{4}{2} = 6$ positions pour les deux N.
   - ***PUIS*** choisir la position du B : 2 choix restants.
   - ***PUIS*** placer le E dans la seule position restante.

   En tout, il y a donc $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes du mot BANANE.
   Choisir un anagramme de MISSISSIPI, c'est :
   - Choisir la position des quatre S parmi dix positions possibles : $\binom{10}{4} = 210$ positions pour les quatre S.
   - ***PUIS*** la position des quatre I parmi six positions restantes : $\binom{6}{4} =$ 15 positions pour les quatre I.
   - ***PUIS*** choisir la position du M : 2 choix restants.
   - ***PUIS*** placer le P dans la seule position restante.

   En tout, il y a donc $210 \times 15 \times 2 = 6300$ anagrammes du mot MISSISSIPI.

Cor. 16.10 :

a. Pour chaque date de naissance de la liste L, il y a 365 choix possibles. Donc il y a 365^n listes L possibles.

b. Pour être sûr que deux personnes sont nées le même jour, d'après le principe de Dirichlet, il faut qu'il y ait au moins 366 personnes : $n \geqslant 366$.

c. On va plutôt compter le nombre de listes L pour lesquelles toutes les personnes ont des dates de naissance différentes.
D'après le cours, ce nombre est $A_{365}^{n} = 365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)$.
Les autres listes sont donc des listes pour lesquelles au moins deux personnes sont nées le même jour.
On cherche donc la plus petite valeur de n pour laquelle $365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1) < \dfrac{365^n}{2}$.
Pour cela on prend Python !

```
n=1
P1 = 365
P2 = 365
while P2>P1/2:
    P2 *= (365-n)
    P1 *= 365
    n += 1
print(n,P1,P2)
```

La valeur de n donnée est... 23. Il suffit de 23 personnes pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que deux d'entre elles soient nées le même jour !
Remarque : `P1` et `P2` sont deux nombres à 59 chiffres...

Cor. 16.15 : Montrons-le par ***récurrence forte***.

Initialisation :

Pour $n = 0$, par définition, $y_0 = x_0$ donc $x_0 = \sum_{k=0}^{0}(-1)^{-k}\binom{0}{k}y_k$ (la somme ne comporte qu'un seul terme, et c'est y_0).

Hérédité :

Supposons la propriété vraie ***pour tout entier*** k ***inférieur à un rang*** $n \in \mathbb{N}$ ***donné***.

Par définition, $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x_k = x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x_k$.

Donc, $x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x_k$.

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $x_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i$.

Donc :

$x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i$

$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}y_i$

$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}y_i$

$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{1-i}y_i\left[\sum_{k=i}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{i}(-1)^k\right]$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=i}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{i}(-1)^k = (-1)^n\binom{n+1}{i}$.

Or $\binom{n+1}{k}\binom{k}{i} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!}$

puis $\binom{n+1}{k}\binom{k}{i} = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \times \frac{(n+1-i)!}{(n+1-k)!(k-i)!}$.

Donc $\binom{n+1}{k}\binom{k}{i} = \binom{n+1}{i}\binom{n+1-i}{k-i}$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{i}(-1)^k &= \sum_{k=i}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{n+1-i}{k-i}(-1)^k \\
&= \binom{n+1}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n+1-i}{k-i}(-1)^k \\
&= \binom{n+1}{i}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n+1-i}{k}(-1)^{k+i} \\
&= \binom{n+1}{i}(-1)^i\left((-1)^{n-i} + \sum_{k=0}^{n+1-i}\binom{n+1-i}{k}(-1)^k\right) \\
&= \binom{n+1}{i}(-1)^i\left((-1)^{n-i} + (1-1)^{n+1-i}\right) \\
&= \binom{n+1}{i}(-1)^n
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : ça marche !

La seconde question est une application immédiate de cette formule.