Méthode d'Euler et équations de prédation de Lotka-Volterra

Le but de ce TD est d'étudier les équations de prédation de Lotka-Volterra visant à simuler la dynamique de populations de proies/prédateurs.

I. Introduction

Les équations de prédation de Lotka-Volterra simulent l'évolution de deux populations naturelles : une population de proies et une population de prédateurs.
Chaque population est représentée par son nombre d'individus qui peut être soit considéré comme entier, soit approximé comme une variable réelle évoluant continument avec le temps.
Notons x la population des proies et y la population des prédateurs. Les idées sous-tendant les équations de Lotka-Volterra sont les suivantes :

- la reproduction des proies est d'autant plus grande que leur population est grande, avec un taux de reproduction noté α ;
- la mort des proies n'est due qu'à la rencontre avec des prédateurs. La mortalité est d'autant plus grande que les proies et les prédateurs sont nombreux, avec un taux de mortalité noté β ;
- la reproduction des prédateurs est d'autant plus grande qu'ils ont de quoi s'alimenter. Elle est proportionnelle à leur population et à la population des proies, avec un taux de reproduction noté γ ;
- la mortalité des prédateurs n'est due qu'à la vieillesse ou à des maladies, avec un taux de mortalité noté δ.

En résumé, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & \alpha x - \beta xy & = & x(\alpha - \beta y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & \gamma xy - \delta y & = & y(\gamma x - \delta) \end{array}\right.$$

Ces équations ont une importance historique dans la mesure où elles constituent la première explication chronologique de certains phénomènes de dynamiques des populations observés. Cependant, elles sont beaucoup trop simplistes pour constituer une bonne simulation des phénomènes naturels.
Les simulations actuelles intègrent plusieurs populations ainsi que les déplacements possibles des différentes espèces, l'influence des saisons, etc...

II. Implémentation

1. Écrire une fonction `suivant(x,y,dt,a,b,c,d)` qui étant données x, y, $\mathrm{d}t$ et les coefficients $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ et $d = \delta$ calculent avec la méthode d'Euler la valeur de $x(t+\mathrm{d}t)$ et $y(t+\mathrm{d}t)$ et renvoie le couple $\big(x(t+\mathrm{d}t); y(t+\mathrm{d}t)\big)$.
2. Écrire une fonction `simulation(x,y,dt,a,b,c,d,N)` qui effectue N étapes de la simulation à partir des conditions initiales x et y et renvoie les listes $[x_0; x_1; ...; x_N]$ et $[y_0; y_1; ...; y_N]$.
3. Représenter sur un même graphique les populations de proies et de prédateurs en fonction du temps en prenant :
   $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{365}$ (en années), $x = y = 22$ (unités arbitraires), $a = d = 1$, $b = c = 0.045$ et $N = 3650$ (jours, c'est-à-dire un intervalle de 10 ans).

4. Représenter, avec les mêmes données, le nombre proies en fonction du nombre de prédateurs.

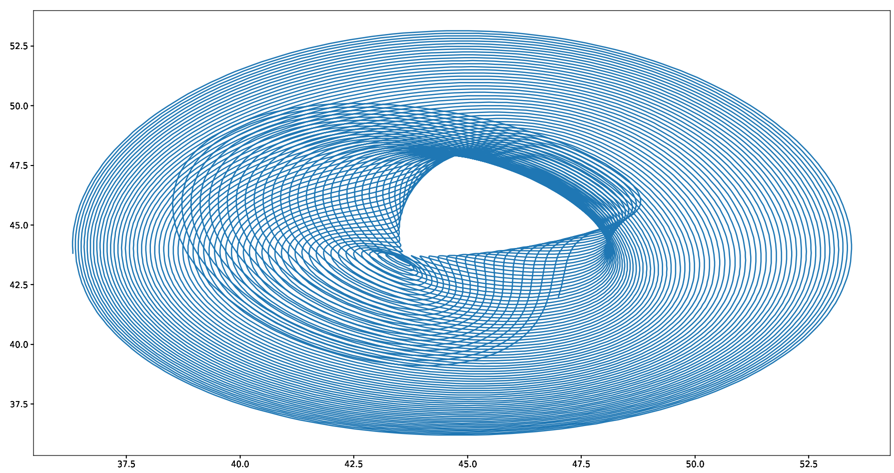
5. Modifier légèrement les données pour observer l'effet de ces modifications sur la dynamique des populations.

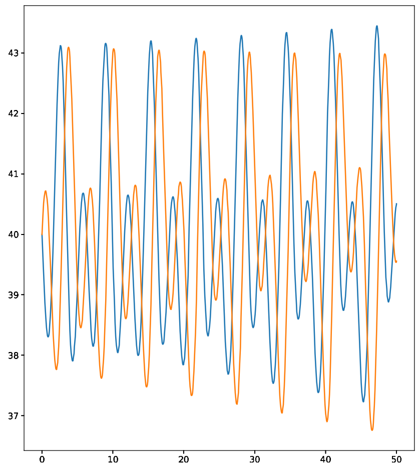
6. Pour simuler le mouvement des populations, on fait intervenir 2 populations de proies et 2 populations de prédateurs régies par les équations :

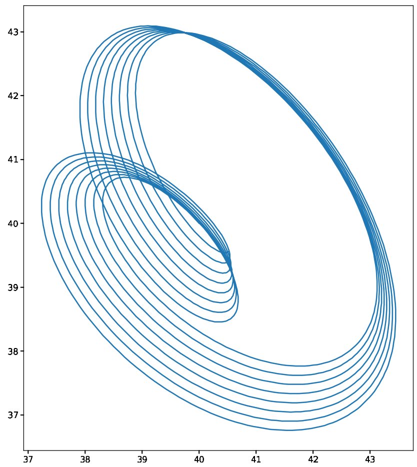
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & \alpha x_1 - \beta x_1 y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = & \alpha x_2 - \beta x_2 y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} & = & \beta x_1 y_1 - \gamma y_1 - \delta y_1 + \delta y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} & = & \beta x_2 y_2 - \gamma y_2 - \delta y_2 + \delta y_1 \end{cases}$$

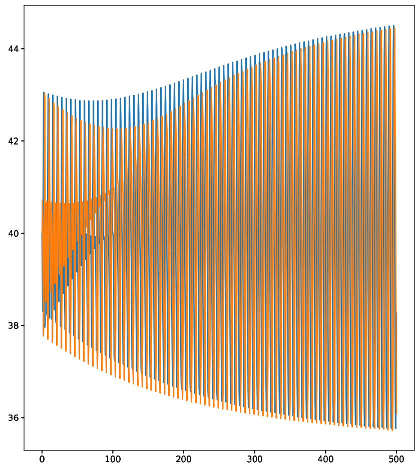
   où δ représente maintenant la « diffusion » des prédateurs d'un groupe à l'autre.
   Refaire le même travail que dans les questions précédentes en faisant des représentations graphiques de $x_1 + x_2$ et $y_1 + y_2$ (en fonction du temps, ou l'un en fonction de l'autre).
   Jeux de données à explorer :

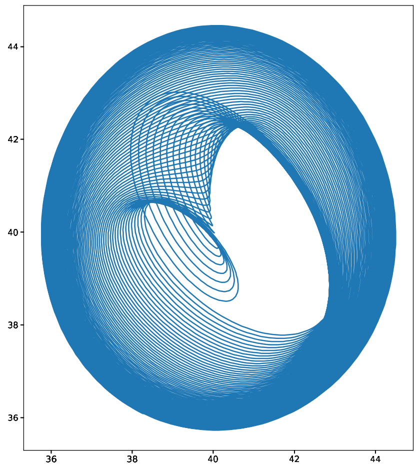
   - $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0.045$, $\delta = 0$, $x_1 = 20$, $y_1 = 15$, $x_2 = y_2 = 22$ sur une période de 500 ans avec $\mathrm{d}t = 1/3650$ an pour observer ce qu'il se passe lorsque les deux populations de prédateurs sont séparées.
     Puis prendre $\delta = 0.001$.
     Varier...
   - $\alpha = \gamma = 1.1$, $\beta = 0.05$, $\delta = 0$, $x_1 = y_2 = 18$, $x_2 = y_1 = 26$ sur une période de 50 ans, puis 100 ans, ..., avec $\mathrm{d}t = 1/3650$ an pour observer ce qu'il se passe lorsque les deux populations de prédateurs sont séparées.
     Puis prendre $\delta = 0.001$.
     Varier...
   - $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0.045$, $\delta = 0$, $y_1 = y_2 = 10$, $x_1 = 12$, $x_2 = 8$...
   - Idem avec $x_1 = 20$, $x_2 = y_2 = 27$, $y_1 = 15$...
   - $\alpha = 1.1$, $\beta = 0.045$, $\gamma = 0.9$, $\delta = 0$, $x_1 = 20$, $x_2 = y_2 = 27$, $y_1 = 15$ sur une période de 100 ans, puis 500 ans. Varier δ...

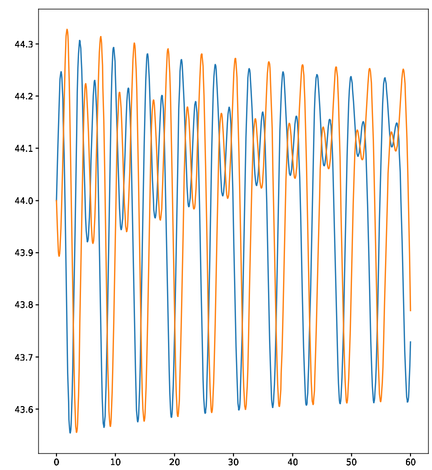


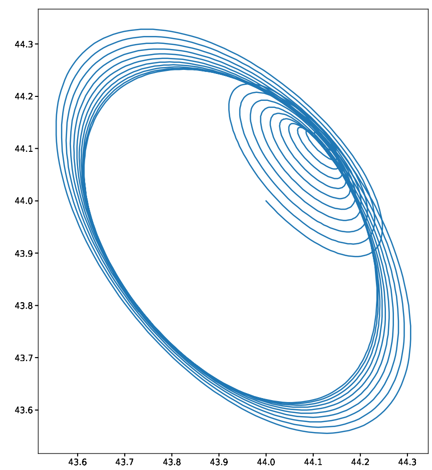

37 38 39 40 41 42 43
0 10 20 30 40 50


37 38 39 40 41 42 43
37 38 39 40 41 42 43


36 38 40 42 44
0 100 200 300 400 500


36 38 40 42 44
36 38 40 42 44


43.6 43.7 43.8 43.9 44.0 44.1 44.2 44.3
0 10 20 30 40 50 60


43.6 43.7 43.8 43.9 44.0 44.1 44.2 44.3
43.6 43.7 43.8 43.9 44.0 44.1 44.2 44.3