Informatique - TP 11

Balistique

Le but de ce TD est d'étudier la trajectoire d'un objet dans un champ de pesanteur soumis à des forces de frottements proportionnelles soit à la vitesse (frottements linéaires) soit au carré de la vitesse (frottements quadratiques). Dans tout le TD, on considèrera que la masse de l'objet est $m = 1kg$ et que l'accélération de la pesanteur terrestre est $g = 10\mathtt{m.s}^{-2}$.
On se rapporte à un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath}$ est horizontal, $\vec{\jmath}$ vertical et dirigé vers le haut.
Enfin, on considèrera qu'à $t = 0$, l'objet est situé à l'origine du repère ($M_0 = O$) et que sa vitesse vaut $\vec{v_0} = v_0\left(\cos(a)\vec{\imath} + \sin(a)\vec{\jmath}\right)$.
On pose $M = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
L'équation différentielle régissant le mouvement s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} - \beta\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} - g\vec{\jmath}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0\cos(a), \dot{y}(0) = v_0\sin(a)$$

I. Frottements linéaires

Dans cette section, on considère que les frottements sont linéaires, autrement dit $\beta = 0\mathtt{kg.m}^{-1}$.

1. Résoudre l'équation différentielle et montrer que

$$x(t) = \frac{v_0\cos(a)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$
$$y(t) = -\frac{gt}{\alpha} + \frac{\alpha v_0\sin(a) + g}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

2. Écrire une fonction `FrotLin(a,v0,alpha,dt=0.001)` prenant en paramètres l'angle initial `a` (de type `float`), la vitesse initiale `v0` (de type `float`) et la valeur de la constante de frottement `alpha` (de type `float`) et renvoyant la liste des valeurs `X` et `Y` des abscisses et des ordonnées de l'objet depuis l'instant $t = 0$ jusqu'au moment où l'objet retombe au sol, par pas de `dt` en temps.
   Cette fonction utilisera la solution explicite de l'équation différentielle donnée ci-dessus.
3. Utiliser la fonction précédente pour tracer la trajectoire de l'objet lorsque $\alpha = 1\mathtt{kg.s}^{-1}$, $v_0 = 10\mathtt{m.s}^{-1}$ et pour un angle initial $a \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right\}$.
4. Écrire une fonction `AngleOptimal(v0,alpha,da=np.pi/180)` prenant en paramètres d'entrée la vitesse initiale `v0` et la constante de frottement `alpha` et renvoyant une valeur approchée de l'angle initial `a` pour lequel l'objet parcourt la plus grande distance horizontale.
   Pour calculer cette valeur, on fera varier l'angle initial de `da` jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ par pas de `da` et on calculera pour chaque valeur de cet angle la distance horizontale parcourue en utilisant la fonction `FrotLin`.
5. Vérifier que l'angle initial optimal est fonction non seulement de la constante de frottements mais aussi de la vitesse initiale de l'objet.

II. Frottements linéaires : méthode d'Euler

Dans cette section, on considère encore que les frottements sont linéaires, autrement dit $\beta = 0\texttt{kg.m}^{-1}$.

1. Réécrire deux fonctions `FrotLin2(a,v0,alpha,dt=0.001)` et `AngleOptimal2(v0,alpha,da=np.pi/180,dt=0.001)` effectuant le même travail que dans la section précédente mais en résolvant l'équation différentielle numériquement grâce à la méthode d'Euler.
   On rappelle que pour cela, on part des conditions initiales données par le vecteur $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0\cos(a) \\ v_0\sin(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM_0} \\ \overrightarrow{v_0} \end{pmatrix}$ puis que de proche en proche on calcule la suite u de vecteurs vérifiant
   $$u_{n+1} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM_{n+1}} \\ \overrightarrow{v_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM_n} + \mathrm{d}t\overrightarrow{v_{n+1}} \\ \overrightarrow{v_n} - \alpha \times \mathrm{d}t\overrightarrow{v_n} - g \times \mathrm{d}t\vec{\jmath} \end{pmatrix}$$
2. Comparer les courbes obtenues à l'aide de la solution théorique et de la solution numérique.

III. Frottements non linéaires : méthode d'Euler

1. Réécrire deux fonctions permettant, en utilisant la méthode d'Euler, d'obtenir les mêmes résultats que dans les parties précédentes mais en prenant en compte les frottements quadratiques. Pour les applications numériques, on prendra par exemple $\alpha = 2.10^{-1}\texttt{kg.s}^{-1}$ et $\beta = 5.10^{-2}\texttt{kg.m}^{-1}$ correspondant approximativement aux caractéristiques atmosphériques.
2. Comparer les trajectoires obtenues en négligeant les frottements non linéaires et en ne les négligeant pas.