Maths - Chapitre 18

Matrices

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre le calcul matriciel d'une part et les espaces vectoriels et applications linéaires d'autre part. Ce lien sera assuré en particulier par le théorème 15.38. Les chapitres 12, 15, 10 et 11 sont à réviser. Notamment, dans le chapitre 11, le paragraphe II.5. sur le produit matriciel, le paragraphe II.9. sur les propriétés du produit matriciel et le suivant sur les règles qui ne sont plus valables pour ce produit doivent être connus, ainsi que les méthodes sur le calcul de l'inverse d'une matrice inversible par exemple.

De même, les paragraphes III., IV. et VI. du chapitre 15 doivent être parfaitement connus.

Dans tout ce qui suit, n et p sont deux entiers naturels non nuls, E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps - pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Matrices et déterminants

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (espaces vectoriels et applications linéaires) et la représentation numérique (matrices) dans le cadre de la dimension finie. [...] Il est attendu des élèves qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Matrices a) Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.	Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.	
b) Noyau, image et rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Interprétation en termes de systèmes linéaires.
Rang d'une matrice A.	Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes, ou comme le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A, ou comme le nombre de pivots de son échelonnée réduite.
Théorème du rang.	
Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image et de rang.	
Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.	Deux matrices équivalentes par ligne ou par colonne ont même rang.
Rang de la transposée.	Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice.

II. Rappels et compléments

II.1. Matrices diagonales

Définition 18.1 (Centre (hors-programme))

On appelle ***centre*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non vide puisqu'il contient la matrice identité.

Théorème 18.2

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

Démonstration hors programme

Soit M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisqu'elle commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute notamment avec les matrices élémentaires.
En écrivant cela pour les matrices de dilatation, on montre que M est une matrice diagonale.
Puis en l'écrivant pour les matrices de transvection, on montre que tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
Réciproquement, une matrice de cette forme commute avec toute matrice donc appartient au centre.

Remarque

En particulier les matrices diagonales ne commutent pas avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 18.1 Calculer AB et BA pour :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.1

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ et

  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et

  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = BA$.

  Les matrices A et B commutent donc.

Propriété 18.3

Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à gauche*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque ligne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de ligne.
Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à droite*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque colonne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de colonne.

II.2. Applications linéaires : rappels

Théorème 15.38 : définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E (qui est donc de dimension finie n) et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace vectoriel F, supposé ici de dimension quelconque, finie ou infinie.
Alors il existe une unique application linéaire $\phi : E \to F$ telle que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\phi(e_i) = v_i$.

Ex. 18.2 Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(i; j; k)$ vérifiant

$$\begin{array}{rclllll} f(i) & = & 2i & - & 3j & & \\ f(j) & = & 3i & + & j & - & 4k \\ f(k) & = & & & 11j & - & 8k \end{array}$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Cor. 18.2

Soit $u = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$.

Cherchons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 0$:

$f(u) = 2xi - 3xj + 3yi + yj - 4yk + 11zj - 8zk = (2x+3y)i + (-3x+y+11z)j + (-4y-8z)k = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y & = & 0 \\ -3x+y+11z & = & 0 \\ -4y-8z & = & 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y & = & 0 \\ 11y+22z & = & 0 \\ -4y-8z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(3; -2; 1)$.

Le théorème 15.50 du rang permet d'affirmer que $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Par ailleurs, $f(i) \neq 0$ et $f(j)$ n'est pas colinéaire à $f(i)$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(i); f(j))$.

Théorème 15.52 : caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors ϕ injective $\Leftrightarrow$ ϕ surjective $\Leftrightarrow$ ϕ bijective.

II.3. Matrices et systèmes linéaires : rappels

Soit $\mathcal{S}$ un système de n équations à p inconnues $(x_1; x_2 ...; x_p) \in \mathbb{K}^p$.

Alors il existe deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que

$(x_1; x_2 ...; x_p)$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifie $AX = B$.

A est appelée matrice associée au système et $(A|B)$ matrice ***augmentée*** associée au système.

Pour résoudre ce système, l'une des méthodes possibles est d'utiliser l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée $(A|B)$ de sorte à obtenir l'unique matrice $(A'|B')$ réduite par lignes équivalente par lignes à $(A|B)$. On a alors :

- le système ne possède aucune solution si et seulement si la matrice $(A'|B')$ possède un pivot dans sa dernière colonne ;
- le système possède une unique solution si et seulement si $(A'|B')$ possède un pivot dans chacune de ses colonnes à l'exception de la dernière. Généralement, ces système ont le même nombre de lignes et d'inconnus, auquel cas $A' = I_n$;
- on appelle inconnues principales celles possédant un pivot dans leur colonne et inconnues secondaires ou paramètres les autres.

  On appelle rang du système le nombre d'inconnues principales.

  Si le système possède des solutions, les inconnues secondaires ***peuvent prendre toute valeur dans*** $\mathbb{K}$ et les inconnues principales sont alors entièrement déterminées par la donnée des valeurs des inconnues secondaires.

II.4. Sous-espaces vectoriels et notion de dimension : synthèse

Il faut connaître tous les espaces vectoriels de référence dont un résumé se trouve dans le chapitre 15, section II.3..

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

- On peut montrer que
  - ⋆ $F \subset E$;
  - ⋆ $0_E \in F$;
  - ⋆ F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (u;v) \in F^2, \forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F$$

- On peut montrer que $F = G \cap H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = G + H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Ker}\, u$ où $u \in \mathcal{L}(E, E')$.
- On peut montrer que $F = v(A)$ où $v \in \mathcal{L}(E'', E)$ et A est un sous-espace vectoriel de E''.

Notion de dimension

- On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie ***s'il existe une famille finie génératrice de*** E.
  Dans ce cas, le théorème d'extraction de base garantit que l'on peut extraire de cette famille une sous-famille ***à la fois génératrice et libre*** : E possède donc une base.
- Le lemme fondamental permet alors de montrer que ***toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même nombre de vecteurs*** : ce nombre est caractéristique de l'espace vectoriel et s'appelle dimension de l'espace vectoriel.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et s'ils sont tous les deux de dimension finie alors

$$\dim F \leqslant \dim E$$

  De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
- ***Formule de Grassmann*** : F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie),

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  - ⋆ Par définition, $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de F.
    Donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim F$.
  - ⋆ L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.
    Donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim E$.

- $\star$ u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.
  Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim F \leqslant \dim E$.
- $\star$ ***Théorème du rang*** : $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.
- $\star$ u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
  Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim E \leqslant \dim F$.
- $\star$ Une application linéaire bijective est appelée ***isomorphisme*** lorsque $E \neq F$, ou ***automorphisme*** lorsque $E = F$.
  Deux espaces vectoriels sont dits ***isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.***
- $\star$ Si E et F sont isomorphes, alors il existe une application linéaire bijective de E dans F : d'après ce qui précède, on a donc
  $\dim E \leqslant \dim F \leqslant \dim E$ c'est-à-dire $\dim E = \dim F$.
- $\star$ u est bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

Ex. 18.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \in E \mapsto P(X+1) \in E$.

1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?
2) Montrer que ϕ est linéaire.
3) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de E.
4) Montrer que ϕ est un automorphisme.
5) Calculer $\phi(Q)$ où $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. En déduire des propriétés des coefficients binomiaux.

Cor. 18.3

1) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
2) Soient P et Q deux polynômes de E, λ, μ deux réels.
   $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$.
   Donc ϕ est linéaire.
3) Soit $k \in [\![0; n]\!]$.
   $\phi(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$.
   Notamment $\deg \phi(X^k) = k$.
4) L'image par ϕ de la base canonique est la famille $\mathcal{F} = \big(1; X+1; (X+1)^2; ...; (X+1)^n\big)$ qui est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Donc ϕ est bijective (elle envoie une base sur une base), linéaire, de E dans E : c'est un automorphisme de E.
5) Calculons $\phi(Q)$ où $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$.
   Remarquons que $Q = (X-1)^n$.
   Donc $\phi(Q) = (X+1-1)^n = X^n$.
   On aurait aussi pu utiliser la linéarité de ϕ :

$$\phi(Q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \phi\left(X^k\right) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{n-k} X^i$$

En utilisant ces deux expressions de $\phi(Q)$, on en déduit donc que :

- $\forall i \in [\![0; n-1]\!]$,
$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{n-k} = 0$$
- Pour $i = n$: $\sum_{k=n}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{n-k} = 1$.

III. Les *diverses* interprétations vectorielles des matrices

III.1. Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 18.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et u un vecteur de E.

On appelle ***matrice de u dans $\mathcal{B}$*** la matrice

$$(x_i)_{i \leq n} \quad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement dit, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la matrice colonne composée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.4 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $u = (7; 3; -2)$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$.

Cor. 18.4

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ex. 18.5 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $P = (X+1)^n$.

$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{i \in [\![1; n+1]\!]}$.

Cor. 18.5

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ \vdots \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{n}{i-1} \right)_{i\in[\![1;n+1]\!]}.$$

III.2. Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 18.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E.
On appelle ***matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$*** la matrice

$$(u_{i,j})_{\substack{i\leq n\\ j\leq p}} \qquad \text{avec } \forall j \in [\![1;p]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ est la matrice $(U_1|U_2|...|U_p)$ des colonnes U_j composées des coordonnées des u_j dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$.
Lorsque la famille $\mathcal{S}$ ne contient qu'un seul vecteur u, la matrice de la famille est celle du vecteur.

Ex. 18.6 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{S} = ((1;0;3);(-1;-1;2))$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Cor. 18.6

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex. 18.7 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $\mathcal{F} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \left(\quad \right)_{\substack{i\in[\![1;n+1]\!]\\ j\in[\![1;n+1]\!]}}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. En déduire une propriété vérifiée par les colonnes de M.

Cor. 18.7

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}n & (-1)^{n-2}(n-1) & & 1 & 0 \\ (-1)^n & (-1)^{n-1} & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $M = \left((-1)^{i+j} \begin{pmatrix} n+1-j \\ i-j \end{pmatrix} \right)_{\substack{i \in [\![1;n+1]\!] \\ j \in [\![1;n+1]\!]}}$ en posant $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = 0$ pour $k < 0$.

De plus $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$.

Donc les colonnes C_1, C_2, ..., C_{n+1} de M vérifient

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} C_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Important !

La matrice d'une famille $\mathcal{S}$ ***dépend de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle on décompose les vecteurs de $\mathcal{S}$***. Pour cette raison, il ne faut pas oublier de préciser dans quelle base s'effectue la décomposition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

III.3. Matrice d'une application linéaire

Définition 18.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.

D'après le théorème 15.38, ***il existe une unique application linéaire*** ϕ telle que

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

On appelle ***matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*** la matrice $(a_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ la matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(e_1), \phi(e_2), ..., \phi(e_p)) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \cdots & \phi(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Ex. 18.8
Quelle est la matrice associée à $\psi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y; -2x + 3y) \in \mathbb{R}^2$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Quelle est l'application linéaire $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ donnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
$\chi : (x; y; z) \mapsto$

Cor. 18.8

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(x; y; z) = (7x - y + 2z; -3x + y; 4x + 5y - 6z)$.

Ex. 18.9 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X + 1)$ de l'exercice 18.3.
Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cor. 18.9

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n \\ 0 & 0 & 1 & & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{\substack{i \le n \\ j \le n}}.$$

III.4. Cas particuliers

Notation

Lorsque ϕ est un ***endomorphisme de*** E rapporté à une base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire lorsque $\phi : ... \to ...$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$.

Important !

Il est cependant possible de rapporter un même espace vectoriel E à deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et d'écrire la matrice d'un endomorphisme ϕ de E rapporté à $\mathcal{B}$ pour les vecteurs de départ et à $\mathcal{B}'$ pour leurs images : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$. ***Nous verrons même plus loin que cette possibilité offre une excellente interprétation géométrique aux matrices carrées inversibles !***

Définition 18.7

On appelle ***application linéaire canoniquement associée*** à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application $\phi \in \mathcal{L}(..., ...)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ de ... et $\mathcal{B}'$ de ... est A.

Ex. 18.10 Quelle est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$? Est-elle injective ? Quel est son rang ?

Cor. 18.10

$\phi_A(x; y) = (x + 2y; 3x + 4y; 5x + 6y) \in \mathbb{R}^3$.
C'est une application injective car $\phi_A(x; y) = (0; 0; 0) \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$ (système immédiat).
Enfin, le théorème du rang permet d'affirmer que $\mathrm{rg}\, \phi_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker}\, \phi_A = 2$.

III.5. Remarques

1) Si on change les bases des ensembles de départ ou d'arrivée d'une application linéaire, la ***matrice associée à l'application linéaire est complètement modifiée !***
2) La matrice de l'application nulle est la matrice nulle quelles que soient les bases des espaces de départ et d'arrivée.
3) ***MAIS***, la matrice de l'application identité $E \to E$ ***n'est la matrice identité que si*** E ***est rapporté à la même base au départ et à l'arrivée !***
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ pour $\dim E = n$.

Ex. 18.11 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ et les bases $\mathcal{B} = (1; X; X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X(X-1); X(X+1); (X-1)(X+1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Cor. 18.11

$\phi(1) = 0 \quad \phi(X) = 1 \quad \phi(X^2) = 2X$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$, il faut obtenir les coordonnées de $\phi(X) = 1$ et $\phi(X^2) = 2X$ dans $\mathcal{B}'$.
Soit $1 = aX(X-1) + bX(X+1) + c(X-1)(X+1)$.

En évaluant en -1, 0 et 1, on obtient $a = 1/2$, $b = 1/2$ et $c = -1$.
De même, on obtient $X = \frac{-1}{2}X(X-1) + \frac{1}{2}X(X+1) + 0 \times (X-1)(X+1)$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Enfin, de la même manière, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

III.6. Théorème d'isomorphisme

Théorème 18.8 (Admis)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
L'application $\Theta : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \Theta(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 18.9

Pour E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p = \dim E \times \dim F$.

III.7. Image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition 18.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $u \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$.
Alors les coordonnées de $\phi(u) \in F$ dans $\mathcal{B}'$ sont les coefficients de MX.

Démonstration

Soit u de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dans E.
Par linéarité, $\phi(u) = \sum_{j=1}^{p} x_j \phi(e_j)$.
Or, par définition, $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$.

Donc $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j\right) f_i$ a pour coordonnées $\left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j\right)_{i\in[\![1;n]\!]}$ dans $\mathcal{B}'$.
On reconnaît la définition des coefficients du produit MX, ce qu'il fallait démontrer.

Ex. 18.12 Quelle est l'image du vecteur $(-2;1)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Cor. 18.12

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image du vecteur $(-2;1)$ est $(0;-2;-4)$.

III.8. Deuxième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$.
Soit par ailleurs $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_q)$ une famille de $q \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E associée à la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.
Alors

$$MS = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(u_1), \phi(u_2), ..., \phi(u_q)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{S})\big)$$

Démonstration

En vertu du théorème précédent, il s'agit simplement de la traduction du théorème 11.9 affirmant que pour si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (U_1|U_2|...|U_q) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a

$$AB = (AU_1|AU_2|...|AU_q)$$

III.9. Troisième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.12

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_p)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2, ..., g_n)$.
Soient $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi\circ\phi) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\big(\psi\circ\phi(\mathcal{B})\big) \text{ par définition}\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{B})\big) \text{ d'après le théorème précédent}\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \text{ par définition}\end{aligned}$$

Ex. 18.13 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3.
On définit de plus $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X-1)$.
Que peut-on dire de $\phi\circ\psi$? de $\psi\circ\phi$?
Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi)$ puis calculer AB et BA.

Cor. 18.13

$\phi\circ\psi = \mathrm{id}_E$ et $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_E$: ce sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi) = \left(\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\right)_{i,j\in[\![1;n+1]\!]}$ par définition et

$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \left((-1)^{i-j}\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\right)_{i,j\in[\![1;n+1]\!]}$.

Enfin $AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi\circ\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = I_{n+1}$ et
$BA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi\circ\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = I_{n+1}$.

III.10. Cas particuliers

1) Si ϕ et ψ sont des endomorphismes de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi\circ\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi\circ\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$: le produit matriciel n'est pas commutatif car ....
....
2) Si ϕ est une forme linéaire de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(\phi) = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$: une matrice-ligne s'interprète naturellement comme ....

IV. Isomorphismes et changements de bases

IV.1. Caractérisation des isomorphismes par leur matrice

Théorème 18.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
$\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On a de plus dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1}$$

Démonstration

Sens direct : supposons $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective avec E et F de même dimension n rapportés aux bases données par l'énoncé.
Alors, d'après la proposition 18.12, on a

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi^{-1}\circ\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ d'une part et
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi^{-1}\circ\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$ d'autre part.
De même, en écrivant la matrice de $\phi\circ\phi^{-1}$ dans $\mathcal{B}'$ on obtient
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right) = I_n$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ est inversible et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right)$$

Réciproquement : supposons que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soit $B = A^{-1}$ et ψ l'application linéaire de F dans E définie par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\psi) = B$.
Alors en écrivant les produits $AB = I_n$ et $BA = I_n$ comme matrices des composées de ϕ et ψ on montre que ϕ est bijective et que $\psi = \phi^{-1}$.

IV.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 18.14

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$.

Démonstration

On montre la première équivalence, la seconde se montrant de façon similaire.
Le sens direct est évident puisque A est inversible si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$.
Réciproque : supposons que $AB = I_n$ et soient ϕ et ψ les applications linéaires canoniquement associées aux matrices A et B.
Alors l'égalité $AB = I_n$ s'écrit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi\circ\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Donc $\phi\circ\psi = \mathrm{id}$ et ϕ est surjective, ψ injective.
Donc d'après le théorème 15.52, ϕ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
On conclut en utilisant le théorème précédent.

IV.3. Matrices de passage

Définition 18.15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.
On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Autrement dit, ***la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$.***

Notation

On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque

On a aussi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

Notamment, toutes les matrices de passage sont . . . .

En effet, ...

IV.4. Propriétés des matrices de passage

Propriété 18.16 (Inverse d'une matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E. Alors :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} \quad \text{par définition} \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)^{-1} \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\text{Id}_E^{-1}\right) \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \\
&= P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Propriété 18.17 (Produit de deux matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') \quad \text{par définition} \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)\,\text{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\text{Id}_E) \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\text{Id}_E) \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') \\
&= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}
\end{aligned}$$

Ex. 18.14 • Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1;1);(2;3))$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ car

• Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique, $\mathcal{B}' = (X(X+1); X(X+2); (X+1)(X+2))$ et $\mathcal{B}'' = (1; X; 2X^2 - 1)$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ car

Calculer les autres matrices de passage entre les différentes bases données.

Cor. 18.14

- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ car $(1;0) = 3(1;1)-(2;3)$ et $(0;1) = -2(1;1)+(2;3)$.
- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car $X(X+1) = 0 + 1.X + 1.X^2$, $X(X+2) = 0 + 2.X + 1.X^2$ et $(X+1)(X+2) = 2 + 3.X + 1.X^2$.

Pour obtenir les autres matrices de passages, il faut obtenir de chaque base dans une autre base.
Par exemple, $1 = aX(X+1) + bX(X+2) + c(X+1)(X+2)$. On cherche $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$.
Pour cela on évalue en $X = 0$: $2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.
En $X = -1$: $b = -1$. Et en $X = -2$: $a = \frac{1}{2}$.
On fait de même pour X et X^2 et on obtient :

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

Donc $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour les matrices $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, on peut par exemple inverser les matrices $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

IV.5. Formules de changement de bases

Proposition 18.18 (Formule de changement de bases pour un vecteur)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\forall u \in E, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Démonstration

On reprend les notations de l'énoncé. Soit $u \in E$. Alors

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E(u)) \quad \text{d'après la proposition 18.10} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \end{aligned}$$

Ex. 18.15 (Cor.) Exprimer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 + 5X - 4$ dans les trois bases de l'exemple précédent.

Proposition 18.19 (Formule de changement de bases pour une application linéaire)

Soient E de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F de bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E,F), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Démonstration

On reprend les notations de l'énoncé. Alors :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}\left(\mathrm{Id}_F\left(\mathcal{C}\right)\right) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\left(\mathcal{B}'\right)\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}\left(\mathrm{Id}_F \circ \phi \circ \mathrm{Id}_E\left(\mathcal{B}'\right)\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) \end{aligned}$$

Proposition 18.20 (Formule de changement de bases pour les formes linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P$$

Proposition 18.21 (Formule de changement de bases pour les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP$$

IV.6. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$.

Méthode

En pratique, pour déterminer l'inverse d'une matrice A, on utilise l'avant-dernière propriété qui revient à résoudre un système de n équations à n inconnues : ou bien $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$ et A est alors inversible et $A^{-1} = B$, ou bien le système est de rang strictement inférieur à n et A n'est pas inversible.
Une autre méthode fructueuse est l'interprétation de la matrice A comme matrice d'une ap-

plication linéaire ou comme matrice de passage.

Méthode

Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer que la ***matrice des coordonnées de cette famille*** dans une base donnée est une ***matrice inversible***.

Ex. 18.16 Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 5y + z = u \\ -2x + y - z = v \\ 4x - y + 2z = w \end{cases}$ et en déduire l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.16

On obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -17 & -7 \end{pmatrix}$$

V. Noyau, image et rang d'une matrice

V.1. Noyau et image d'une matrice

Définition 18.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
On appelle ***noyau de la matrice*** A le noyau de ϕ.
On appelle ***image de la matrice*** A l'image de ϕ.

Notation

On note, comme pour les applications linéaires, $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.

Remarque

Avec les notations de la définition, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ et $\mathrm{Im}(A)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

V.2. Conservation de la dimension du noyau et de l'image par multiplication par des matrices inversibles

Proposition 18.23

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(MA) = \dim \mathrm{Ker}(AN)$$

et

$$\dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Im}(MA) = \dim \operatorname{Im}(AN)$$

Démonstration

Démontrons la première égalité, les autres se démontrant de façon similaire. Soient $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application canoniquement associée à A et $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'automorphisme canoniquement associé à M.

On a $u \in \operatorname{Ker}(MA) \Leftrightarrow \psi(\phi(u)) = 0 \Leftrightarrow \phi(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker}(A)$ car ψ est bijective.

Donc $\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}(MA)$.

V.3. Rang d'une matrice : rappel

Nous avons défini au chapitre 11 section V.5. le rang d'une matrice de la façon suivante :

Définition 18.24

On appelle ***rang*** d'une matrice A le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A.

Or le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite par lignes est de façon évidente égale à la dimension de l'image de cette matrice. D'après la proposition précédente, c'est aussi la dimension de l'image de A puisque on passe de A à l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A en multipliant par des matrices élémentaires inversibles. Donc une définition alternative du rang d'une matrice est :

Définition 18.25

On appelle ***rang*** d'une matrice A la dimension de son image : $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

Remarque

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

V.4. Théorème du rang : version matricielle

Théorème 18.26 (Théorème du rang)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = p$$

V.5. Caractérisations des matrices inversibles

Théorème 18.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\text{rg}(A) = n$;
3) $\dim \text{Ker}(A) = 0$.

Démonstration

En remarquant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales pour l'application linéaire canoniquement associée à A, il s'agit d'une conséquence directe du théorème 15.52 énonçant des équivalences similaires pour les applications linéaires.

V.6. Rang et transposition

Propriété 18.28

Quelle que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\text{rg}\, A = \text{rg}\, {}^tA$;
- $\text{rg}\, A \leq \min(n, p)$.

Démonstration

$\text{rg}(A) = \dim \text{Im}(ER) = \dim \text{Im}(R)$.
$\text{rg}\left({}^tA\right) = \dim \text{Im}\left({}^tR\,{}^tE\right) = \text{rg}\left({}^tR\right)$.
Or l'algorithme de Gauss appliqué à ${}^tR$ conduit à la matrice I_r bordée de 0, donc $\text{rg}\, {}^tR = \text{rg}\, R$.
On a donc bien $\text{rg}\, A = \text{rg}\, {}^tA$.
Concernant la deuxième propriété, elle découle directement du fait que $\text{rg}\, A \leqslant n$ et $\text{rg}\, {}^tA \leqslant p$ puisque $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $\text{Im}\left({}^tA\right)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Remarque

Ce théorème permet d'affirmer que le rang d'une matrice est aussi bien égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes que de celle de ses vecteurs colonnes. Plus généralement, il autorise à faire aussi bien des opérations sur les lignes que sur les colonnes pour obtenir de façon algorithmique le rang d'une matrice.

Ex. 18.17 $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} =$

Cor. 18.17

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_1 + C_2$, etc...

Donc $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$