Maths - TD n° 4

Espaces vectoriels en dimension finie

Ex. 4.1 (Cor.) On appelle ***carré magique*** toute matrice telle que les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des diagonales soient égales.

Par exemple $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ est un carré magique, la somme des lignes/colonnes/diagonales étant égale à 12.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$ où on identifie les carrés magiques à des 9-uplets de nombres réels. On note F l'ensemble de tous les carrés magiques vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^9$: $F \subset E$.

Pour un carré magique C, on notera $c_{1,1}, c_{2,1}..., c_{3,3}$ ses coefficients ou, indifféremment, $c_1, c_2, ..., c_9$, ordonnés de la façon suivante :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_7 \\ c_2 & c_5 & c_8 \\ c_3 & c_6 & c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\phi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + y + z \in \mathbb{R}$.
   Montrer que ϕ est linéaire, calculer $\operatorname{rg} \phi$ puis $\dim \operatorname{Ker} \phi$.
3. Soit $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   Montrer que $C \in \mathbb{R}^9$ est un carré magique si et seulement si $\exists c \in \mathbb{R}, C = cJ + D$ où D est un carré magique dont les sommes (par ligne, par colonne ou par diagonale) sont nulles.
   On note F_0 l'ensemble des carrés magiques de sommes nulles.
4. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de F.
5. Soit $\psi : M \in \mathbb{R}^9 \mapsto (\phi(L_1); \phi(L_2); \phi(L_3); \phi(C_1); \phi(C_2); \phi(C_3); \phi(D_1); \phi(D_2)) \in \mathbb{R}^8$
   où L_1 est la première ligne de M vue comme matrice, C_1 sa première colonne, D_1 sa première diagonale, etc...
   Montrer que $F_0 = \operatorname{Ker} \psi$.
6. Calculer $\operatorname{rg} \psi$ puis $\dim F_0$.
7. Donner une base de F.

Ex. 4.2 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $P \in \mathbb{N}^*$ et F_P le sous-ensemble de E composé des suites P périodiques.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie.
3. Soit $U(k)$ la suite P périodique telle que $U(k)_n = 1$ si $n = k[P]$ et $U(k)_n = 0$ sinon.
   Montrer que $\mathcal{B} = \big(U(0); U(1); ...; U(P-1)\big)$ est une base de F. En déduire $\dim F$.
4. Soit $c = e^{\frac{2i\pi}{P}}$. Soit $V(k)$ la suite définie par $V(k) = \big(c^{kn}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que $\mathcal{C} = \big(V(0); V(1); ...; V(P-1)\big)$ est une base de F.
5. Soit $u \in F$. Exprimer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de u dans $\mathcal{C}$.

6. Soit $\phi : Q \in \mathbb{R}_{P-1}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{P-1} Q(c^k)X^k \in \mathbb{R}_{P-1}[X]$.
   Montrer que ϕ est un automorphisme.
7. Soit $u \in F$. Exprimer les coordonnées de u dans $\mathcal{C}$ en fonction des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ à l'aide de ϕ.

Correction

Cor. 4.1 :

7. Réponse : les carrés magiques sont de la forme

$$C = \begin{pmatrix} -b+c & a+2b+c & -a-b+c \\ -a+c & c & a+c \\ a+b+c & -a-2b+c & b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Si l'on impose de plus que :
- les coefficients sont entiers, on doit prendre $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$;
- les coefficients sont deux à deux distincts, on doit prendre

$$b \neq 0 \quad \text{et} \quad a \notin \left\{-3b; -2b; \frac{-3b}{2}; -b; \frac{-b}{2}; 0; b\right\}$$

Par exemple, pour $a = 2, b = 1, c = 4$, on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

exemple donné en début d'énoncé.
Enfin, pour gagner en symétrie, on peut faire le changement de variable $u = a+b$, $v = b$ qui donne la forme

$$C = \begin{pmatrix} -v+c & u+v+c & -u+c \\ -u+v+c & c & u-v+c \\ u+c & -u-v+c & v+c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}^*, u \in \mathbb{Z}/\left\{-2v; -v; \frac{-v}{2}; 0; \frac{v}{2}; v; 2v\right\}$$