Maths - TD n° 6

Suites récurrentes

Dans tout le TD, on dénotera par :

- I un intervalle réel ;
- f une fonction de $\mathcal{F}(I, I)$;
  (autrement dit f est définie sur I et $f(I) \subset I$: on dit que I ***est stable par*** f)
- a un élément de I.

On définit alors la suite u par $\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$.

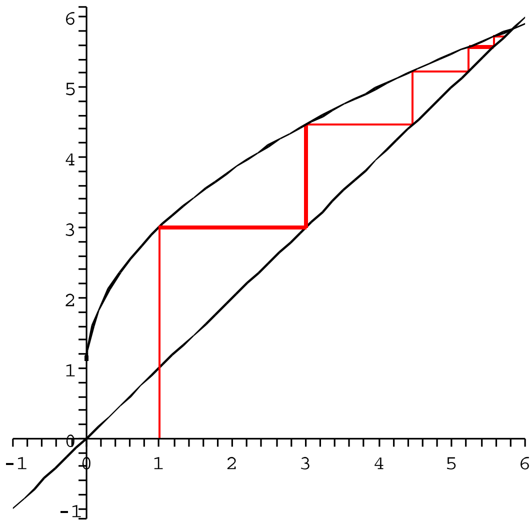
On étudiera aussi les suites $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} w_0 & = & \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & g(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{cases}$.

.1. Existence et représentation graphique d'une suite récurrente

Ex. 6.1

1. Démontrer que u est bien définie.

Ci-contre la représentation graphique de la suite v.
Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse v_0 de la représentation graphique de r.
Pour placer v_1 en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée v_1 de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
On peut alors recommencer le même processus pour représenter v_2, v_3 etc…



2. Prouver l'existence de la suite v (c'est-à-dire montrer qu'elle est bien définie).
3. Prouver l'existence de la suite w puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé en prenant 2cm pour unité.

.2. Monotonie

Ex. 6.2

1. Montrer que si f est strictement croissante sur I et si $u_1 > u_0$ alors u est strictement croissante.
2. Montrer que si f est croissante sur I alors u est monotone.
3. Que peut-on dire si f est décroissante sur I ?
4. Que peut-on dire du sens de variation des suites v et w précédemment définies.

.3. Théorème du point fixe et convergence

On dit que $\alpha \in I$ est un point fixe de f si $\alpha = f(\alpha)$.

Ex. 6.3 On suppose f ***continue*** sur I.

1. Montrer que si I est un segment (i.e. I de la forme $[b;c], b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$) alors f possède au moins un point fixe sur I.
2. Montrer que si I est un segment et si f est croissante sur I alors u converge vers un point fixe de f sur I.
3. Donner un exemple d'une fonction $f(: I \to I)$ telle que u diverge :
   - avec f croissante et $I = [0; +\infty[$;
   - avec f décroissante et $I = [0; 1]$.
4. Donner un exemple d'une fonction $f : [0;1] \to [0;1]$ décroissante telle que u converge.

.4. Exemples d'utilisation

Ex. 6.4 Étudier la convergence des suites v et w définies dans l'exercice 6.1.

Ex. 6.5 On définit la suite t par $\begin{cases} t_0 & \in & \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = & h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{cases}$

1. Montrer que t est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de h et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que t est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de t lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

Ex. 6.6 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite s définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0;1]) = [0;1]$, représenter graphiquement k et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite s pour parvenir à une conclusion.]

Ex. 6.7 (Cor.) [**] Soit $a \in [0;1]$ et u définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.
Remarque : on pourra éventuellement traiter les deux questions en même temps.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite est convergente.
2. Déterminer lorsqu'elle converge un équivalent de $u_n - l$.