Maths - Chapitre 18

Probabilités

La théorie des probabilités naît dans un premier temps d'une réponse que **Galilée**[1] donne à une question du Prince de Toscane : « Lorsqu'on lance 3 dés et qu'on additionne les résultats, il y a 6 manières d'obtenir 9 et 6 manières d'obtenir 10. Pourquoi alors leur somme est plus souvent égale à 10 qu'à 9 ? »

FIGURE 18.1 – Décompositions de 9 et 10 en sommes de 3 dés.

$$9 = \begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ 1+4+4 \\ 2+2+5 \\ 2+3+4 \\ 3+3+3 \end{cases} \qquad 10 = \begin{cases} 1+3+6 \\ 1+4+5 \\ 2+2+6 \\ 2+3+5 \\ 2+4+4 \\ 3+3+4 \end{cases}$$

On considère cependant que le véritable point de départ de la théorie des probabilités est la correspondance entre **Blaise Pascal** (voir note 1 page 38) et **Pierre de Fermat**[2]au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Elle se développe ensuite progressivement autour des travaux de **Christian Huyghens**[3], **Pierre-Siméon de Laplace**[4], etc...

Mais ce n'est qu'au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle que la théorie des probabilités prend sa forme moderne grâce au livre *Fondements de la théorie des probabilités* d'**Andreï Kolmogorov**[5].

Ce chapitre a pour but d'introduire le vocabulaire de base de l'axiomatique de Kolmogorov et de l'utiliser pour la modélisation et la résolution de problèmes simples issus d'***expériences aléatoires*** qui n'ont qu'un nombre ***fini d'issues possibles***. Les notions et résultats du chapitre 16 doivent être ***révisés et maîtrisés***.

1. **Galilée**(1564 ;1662), italien, est considéré comme le fondateur de la physique moderne. Il invente la lunette astronomique et, en étudiant le mouvement des planètes du système solaire, en vient à soutenir la thèse de Copernic que la Terre tourne autour du Soleil. Il découvre le ***principe de Galilée*** et à ce titre est l'un des précurseurs qui permettront à **Newton** (voir note 2 page 38) de jeter les bases de la mécanique des solides et des lois de la gravitation. Il a aussi contribué au progrès des mathématiques, notamment en géométrie.
2. **Pierre de Fermat**(∼1600 ;1665), mathématicien et physicien français ayant notamment contribuer avec Pascal à la fondation du calcul des probabilités. Il s'intéressa aussi à l'optique et surtout à l'arithmétique, domaine dans lequel il excellait.
3. **Christian Huyghens**(1629 ;1695), mathématicien et physicien néerlandais. Il découvre notamment le principe de conservation de l'énergie cinétique, la nature ondulatoire de la lumière et publie en mathématiques le premier traité consacré à la théorie des probabilités.
4. **Pierre-Siméon de Laplace**(1749 ;1827), mathématicien et physicien français. On lui doit notamment un traité *Essai philosophique sur les probabilités* qui fera référence pendant un siècle, des travaux sur les polynômes et les équations polynomiales, et plusieurs contributions majeures pour la résolution d'équations différentielles
5. **Andreï Kolmogorov**(1903 ;1987), mathématicien russe dont l'œuvre est considérable. En dehors des probabilités dont il développe l'axiomatisation moderne, il apporte notamment des contributions majeures à l'étude des ***systèmes dynamiques***, c'est-à-dire - en simplifiant un peu - à l'étude des suites récurrentes de nombres complexes.

Enfin, concernant les notions d'expérience aléatoire et de probabilité que nous étudierons et manipulerons tout au long du chapitre, elles seront essentiellement fondées sur notre seule intuition. Précisons simplement que :

- il revient au même de dire que « ***j'ai*** 1 ***chance sur*** 19 068 840 ***de gagner au loto*** » ou de dire « ***ma probabilité de gagner au loto est de*** $\dfrac{1}{19\ 068\ 840}$ » ;
- par conséquent, la probabilité d'un événement est un nombre (réel) compris entre 0 et 1, et dans le cas fini le calcul d'une probabilité revient souvent à dénombrer deux ensembles ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 0, cet événement a une ***très faible de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 1, cet événement a une ***très forte de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire.

I. Programme officiel

Probabilités

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Généralités a) Expériences aléatoires et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé ***univers***. Événement, événement élémentaire (singleton),événement contraire, événement « A **ou** B », événement « A **et** B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où l'univers est fini.
b) Espace probabilisé fini	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$, et pour toutes parties disjointes A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Équiprobabilité (ou probabilité uniforme). Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
c) Probabilité conditionnelle	

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, probabilité conditionnelle de A sachant B.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique.
L'application P_B définit une probabilité sur Ω.	
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	
Formules de Bayes.	On donnera plusieurs utilisations issues de la vie courante.
d) Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance des A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

II. Univers et événements

II.1. Univers

Définition 18.1 (Univers)

Étant donnée une expérience aléatoire on appelle :

- ***issues*** ou ***réalisations*** les ***résultats possibles*** de cette expérience aléatoire ;
- ***univers*** ou ***univers des possibles*** l'ensemble des tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Notation

Généralement, on note Ω l'univers.

Ex. 18.1 (Cor.)

1) On lance une pièce de monnaie et on observe sur quelle face elle tombe.
   Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
2) Même question lorsqu'on lance un dé à 6 faces.
3) Même question lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces.

Remarque

On se limitera dans ce chapitre au cas où Ω est un ensemble fini conformément au programme. On peut cependant facilement imaginer des expériences aléatoires pour lesquelles l'univers est infini. Par exemple, dans une chaine de production d'écrous, on tire aléatoirement un écrou pour vérifier si son diamètre et son pas de vis sont bien conformes aux spécifications imposées.

L'univers est ici l'ensemble des diamètres possibles pour l'écrou, et il s'agit à priori d'une partie infinie de $\mathbb{R}_+^*$.

Dans tout ce qui suit, on se donne une expérience aléatoire avec un univers Ω fini.

II.2. Événement

Définition 18.2 (Événement)

On appelle ***événement*** toute partie de Ω.

On appelle ***événement élémentaire*** ou ***singleton*** tout événement ***avec un unique élément***.

Lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire, on dit qu'un événement A ***se produit*** si l'issue de l'expérience aléatoire ***appartient à*** A.

Remarque

Un événement est par définition une partie de Ω donc un ***élément*** de ......

Ex. 18.2 (Cor.) On lance un dé à 6 faces. Expliciter les événements suivants et dire s'ils sont élémentaires ou non :

1) A :« le résultat du lancer est pair ».
2) B :« le résultat du lancer est inférieur ou égal à 2 ».
3) $C = A \cap B$.

Définition 18.3 (Événement contraire)

Étant donné un événement A, on appelle ***événement contraire de*** A le complémentaire de A dans Ω.

Autrement dit, l'événement contraire de A est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***ne se produit pas***.

Notation

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Ex. 18.3 Quels sont les événements contraires des événements A, B et C de l'exercice précédent ?

Cor. 18.3

II.3. Conjonction, disjonction d'événements

Définition 18.4 (Conjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** A **et** B ou encore ***conjonction des événements*** A, B l'événement $A \cap B$.

Autrement dit, l'événement $A\,\mathbf{et}\,B$ est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***et*** B ***se produisent*** (en même temps).

Définition 18.5 (Disjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** $A\,\mathbf{ou}\,B$ ou encore ***disjonction des événements*** A, B l'événement $A \cup B$.
Autrement dit, l'événement $A\,\mathbf{ou}\,B$ est ***celui qui se produit si et seulement si l'un ou l'autre des deux événements*** A, B ***se produit***.

Ex. 18.4 Que vaut l'événement $A\,\mathbf{et}\,B$ de l'exercice 18.2 ?

Cor. 18.4

II.4. Événement impossible, événements incompatible

Définition 18.6 (Événement impossible)

On dit qu'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est ***impossible*** si $A = \emptyset$.

Définition 18.7 (Événements incompatibles)

On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***incompatibles*** si $A\,\mathbf{et}\,B$ est impossible.
Autrement dit, deux événements A, B sont incompatibles si ....

Ex. 18.5 On lance deux dés à 6 faces et on note Ω l'ensemble des issues possibles. Expliciter les événements suivants (pour les quatre premiers, on les donnera en extension) :

1) A : « la somme des deux dés est paire ».
2) B : « chacun des dés est pair ».
3) C : « chacun des dés est impair ».
4) $D = \overline{A}$: ....
5) $E = A \cap B$.
6) $F = D \cap \overline{C}$.
7) $G = \overline{B} \cap \overline{C}$.
8) $H = G \cap A$.

Cor. 18.5

II.5. Système complet d'événements

Définition 18.8

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de $n \in \mathbb{N}^*$ événements forme un ***système complet d'événements*** si c'est une ***partition*** de Ω.

Autrement dit, une famille $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'événements si $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et si les événements de la famille sont ***deux à deux*** incompatibles.

Ex. 18.6 Montrer que la famille (B, C, G) de l'exercice 18.5 forme un système complet d'événements.

Cor. 18.6

III. Espaces probabilisés

III.1. Probabilité

Définition 18.9 (Probabilité)

On appelle ***probabilité sur un univers*** Ω toute ***application*** $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ vérifiant les propriétés :

1) $P(\Omega) = 1$;
2) pour tout couple $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ d'événements ***incompatibles***,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Autrement dit, la seconde propriété s'écrit

$$\forall (A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition 18.10 (Espace probabilisé)

On appelle ***espace probabilisé*** (Ω, P) la donnée d'un univers et d'une probabilité définie sur cet univers.

Définition 18.11 (Probabilité d'un événement)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On appelle ***probabilité d'un événement*** $A \subset \Omega$ le réel $P(A) \in [0; 1]$.

Propriété 18.12

Soient (Ω, P) un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'événements ***deux à***

deux incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} P\left(A_i\right).$$

Démonstration

Propriété 18.13

Étant donné un univers ***fini*** $\Omega = \{\omega_1; ...; \omega_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de donner les images de $n-1$ événements élémentaires de Ω pour définir une probabilité sur Ω.

Démonstration

Ex. 18.7 On jette un dé truqué tel que $\forall i \in [\![1; 5]\!]$, $P\big(\{i\}\big) = \dfrac{1}{7}$.

1) Calculer $P\big(\{6\}\big)$.
2) Calculer $P\big($« l'issue est paire »$\big)$.

Cor. 18.7

III.2. Hypothèse d'équiprobabilité

Définition 18.14

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'on fait ***l'hypothèse d'équiprobabilité*** lorsqu'on munit Ω de la probabilité P telle que pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, $P\left(\{\omega\}\right) = \dfrac{1}{n}$.
La probabilité P est alors bien définie puisque les probabilités des événements élémentaires sont données et que $P(\Omega) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.
La probabilité P ainsi définie est appelée ***probabilité uniforme*** sur Ω et (Ω, P) ***espace probabilisé uniforme***.

Ex. 18.8 On jette simultanément deux dés non truqués (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse d'équiprobabilité).
Pour chaque entier $i \in [\![2; 12]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i.

Cor. 18.8

Propriété 18.15

Soit A un événement. ***Sous l'hypothèse d'équiprobabilité***, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

Démonstration

III.3. Propriétés d'une probabilité

Lemme 18.16

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Quels que soient les événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est A et

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Propriété 18.17 (Probabilité de A ou B)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Remarque

La démonstration précédente fait apparaître comme résultat intermédiaire que pour toutes parties A, B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A)$.
Bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, il est souvent utile.

Propriété 18.18 (Probabilité de l'événement contraire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Démonstration

Propriété 18.19 (Croissance d'une probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors quel que soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A \cup B) \geqslant P(A)$$

Démonstration

Ex. 18.9 ***Problème du prince de Toscane***
On jette simultanément trois dés non truqués.
Calculer la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 9 puis la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 10.
Comparer les probabilités.
Indications : on pourra se référer au début de chapitre pour les décompositions de 9 et 10 en somme de trois dés et utiliser au besoin les résultats de l'exercice 18.8.

Cor. 18.9

IV. Probabilités conditionnelles

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

IV.1. Définition

Définition 18.20 (Probabilité de A sachant B)

Soit A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(B) > 0$.
On appelle ***probabilité conditionnelle de*** A ***sachant*** B ou plus simplement ***probabilité de*** A ***sachant*** B le quotient

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0; 1]$$

Notation

On note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Remarques

- ***L'hypothèse*** $P(B) > 0$ est absolument nécessaire sans quoi le quotient $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ n'est pas défini.
- Une probabilité étant croissante et $A \cap B$ étant inclus dans B, on a bien comme l'affirme la définition $P_B(A) \leqslant 1$. Il est par ailleurs évident que ce quotient de deux nombres positifs est positif.

Remarques

- Une probabilité conditionnelle s'interprète comme suit : si l'on sait que l'événement B s'est produit, l'univers est réduit à cet événement, notamment $P_B(B) = 1$. Par ailleurs, les issues de A n'appartenant pas à B sont impossibles, donc l'événement A est réduit à $A \cap B$.

  Pour calculer la probabilité d'un événement A sachant que B s'est produit il faut donc :
  - ⋆ se restreindre à l'événement $A \cap B$, les autres issues de A étant impossibles ;
  - ⋆ ramener la probabilité de l'événement ainsi obtenu à la probabilité d'obtenir B, c'est-à-dire effectuer le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, l'interprétation est encore plus simple : le nombre d'issues favorables est $\mathrm{Card}(A \cap B)$, le nombre total de cas possibles est $\mathrm{Card}\, B$ donc

$$P_B(A) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}\, B} = \frac{\frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{n}}{\frac{\mathrm{Card}(B)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ex. 18.10 On jette deux dés non truqués.
Pour chaque entier $i \in [\![6; 8]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i sachant que l'un des deux dés au moins a donné un résultat pair.

Cor. 18.10

Propriété 18.21

Étant donné un événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$, l'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration

Remarque

P_B étant une probabilité sur Ω, elle possède notamment toutes les propriétés de la section III.3.

IV.2. Formule des probabilités totales

Théorème 18.22 (Formule des probabilités totales)

Étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ tel que pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $P(A_i) > 0$, on a pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i) P(B|A_i)$$

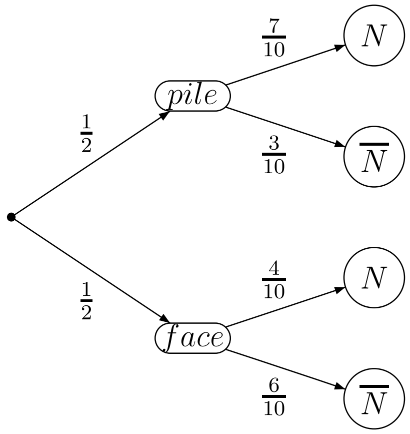
Démonstration

Méthode

La formule des probabilités totales est utile lorsque plusieurs expériences aléatoires successives sont effectuées.

Imaginons la situation suivante : deux sacs numérotés contiennent pour le premier 7 boules noires et 3 boules rouges, pour le second 4 boules noires et 6 boules rouges. On tire à pile ou face, si la pièce tombe sur Pile, on tire une boule dans le premier sac, sinon on tire une boule dans le second sac.

Le schéma ci-contre représente l'enchaînement de ces deux expériences aléatoires.



On cherche à calculer la probabilité de tirer une boule noire et on note N l'événement correspondant. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(N) &= P(pile)P(N|pile) + P(face)P(N|face) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Ex. 18.11 Dans un lycée comptant 51% de filles, 12% des filles et 15% des garçons sont en classes préparatoires.
Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en classes préparatoires ?

Cor. 18.11

Ex. 18.12 On place dans un sac 3 boules noires et 7 boules rouges. On effectue trois tirages aléatoires successifs d'une boule dans le sac.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules noires en supposant que l'***on remet la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage avec remise***).
2) Même question en supposant que l'***on ne remet pas la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage sans remise***).

Cor. 18.12

IV.3. Formule des probabilités composées

Théorème 18.23 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'événements telle que $\forall i \in [\![1; n-1]\!], P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$.
On a alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration

Remarque

Pour que la formule soit valide, on pose que l'intersection d'une famille vide est Ω. Ceci est cohérent avec les conventions identiques prises pour la somme d'une famille vide ou le produit d'une famille vide.
En effet, dans tous les cas, la convention est de choisir comme résultat d'une opération appliquée à une famille vide .... de l'opération concernée :

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \qquad \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1 \qquad \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = \Omega \qquad \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \dots.$$

Notamment on rappelle que $0! = 1$.

Méthode

La formule des probabilités composées permet une généralisation de la formule obtenue dans l'exercice 18.12 pour les tirages sans remise dans le cas où l'on effectue un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque d'expériences aléatoires successives.

Ex. 18.13 Dans un sac, on place $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et une boule blanche. On effectue n tirages sans remise. Quelle est la probabilité qu'une boule noire reste dans le sac à la fin des tirages ?

Cor. 18.13

V. Formules de Bayes

V.1. Formule de Bayes simple

Théorème 18.24 (1re formule de Bayes)

Pour tous événements A, B de probabilité non nulle,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une probabilité conditionnelle $P(A|B)$ doit être calculée, ***avant tout calcul***, se demander si $P(B|A)$ n'est pas déjà connue. Dans ce cas, la formule de Bayes simple devrait conduire rapidement au résultat.

Ex. 18.14 Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice 18.11, calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'il est en classes préparatoires.

Cor. 18.14

V.2. Formule de Bayes généralisée

Théorème 18.25 (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle alors

$$\forall i \in [\![1;n]\!], P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Démonstration

Ex. 18.15 Un nouveau test de dépistage d'une maladie rare est trouvé par une équipe médicale.
Pour un individu malade, le test donne un résultat positif avec une probabilité a.
Pour un individu sain il donne un résultat positif avec une probabilité b.
On estime à 1% la probabilité qu'un individu soit atteint par cette maladie.
On dit que le test est ***acceptable*** si 99% des individus testés positifs sont effectivement malades.
Donner une condition sur a, b pour que le test soit acceptable.

Cor. 18.15

VI. Événements indépendants

VI.1. Définition

Définition 18.26 (Couple d'événements indépendants)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B, on dit qu'ils sont

indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques

- Si $P(B) > 0$, les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Autrement dit, pour un événement B possible, l'indépendance des événements A et B signifie ***que la connaissance de** B **ne renseigne en rien sur la probabilité de*** A.

- Si $P(B) = 0$, quel que soit l'événement A, les événements A et B sont indépendants.

VI.2. Famille finie d'événements mutuellement indépendants

Définition 18.27 (Indépendance mutuelle)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements mutuellement indépendants*** lorsque

$$\forall J \subset [\![1;n]\!], P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Définition 18.28 (Indépendance deux à deux)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements indépendants deux à deux*** lorsque

$$\forall i, j \subset [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j)$$

Ex. 18.16 Donner un exemple d'espace probabilisé et trois événements A, B, C tels que les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais non mutuellement indépendants.

Cor. 18.16

Correction des exercices

Cor. 18.1 :

1) $\Omega = \{Pile; Face\}$.
2) $\Omega = [\![1;6]\!] = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
3) $\Omega = [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!]$ c'est-à-dire

$$\Omega = \left\{\begin{array}{l} (1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);\\ (2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6);\\ \dots\\ (6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\end{array}\right\}$$

Cor. 18.2 :

1) $A = \{2; 4; 6\}$ n'est pas un événement élémentaire.
2) $B = \{1; 2\}$ n'est pas un événement élémentaire.
3) $C = \{2\}$ est un événement élémentaire.