Nombres réels et suites numériques

« Les considérations qui font l'objet de ce petit écrit remontent à l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l'École polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d'un fondement véritablement scientifique à l'arithmétique. En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition ***que chaque grandeur qui croît constamment [et qui reste majorée] doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite***, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais [...] ce sentiment d'insatisfaction s'imposait tant à moi que je pris la ferme résolution d'y réfléchir sans relâche [...]. On dit constamment que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, et ***pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité***. », extrait de *Continuité et nombres irrationnels*

Richard Dedekind[1]

Le point de départ de ce chapitre sera la propriété qui résulte du travail de **Dedekind** et de ses successeurs et qui ***caractérise l'avantage théorique qu'il y a de travailler dans l'ensemble des nombres réels plutôt que dans l'ensemble des nombres rationnels***. Nous approfondirons la notion de nombre réel et en tirerons des conséquences pour l'étude des suites numériques et de ***leurs limites***.

I. Programme officiel

Nombres réels et suites numériques

1. **Richard Dedekind**(1831 ;1916), mathématicien allemand ayant contribué à fonder la logique mathématique contemporaine, notamment la construction des ensembles de nombres.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Ensembles usuels de nombres	
Entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	
Droite réelle.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors-programme.
La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.	
Borne supérieure (respectivement inférieure) d'une partie non vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$.	
Partie entière.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut ou par excès.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a, b dans X, on a $[a; b] \subset X$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Explicitement, implicitement ou par récurrence.
Monotonie, suite majorée, minorée, bornée.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Exemples d'étude de la monotonie d'une suite récurrente.
Suites stationnaires.	
Suites arithmétiques, géométriques.	Les élèves doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.	La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Notation $u_n \to l$. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle l en majorant $\lvert u_n - l\rvert$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, suite divergente.	
Toute suite réelle convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	
Passage à la limite dans une inégalité.	
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorème de convergence par encadrement, théorèmes de divergence par majoration ou minoration.	
Théorème de la limite monotone.	
Théorème des suites adjacentes.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Suites extraites	
Définition, utilisation pour montrer la divergence d'une suite.	
f) Suites complexes	
Convergence d'une suite complexe.	Traduction à l'aide des parties réelles et imaginaires.
Suites complexes bornées : toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaison linéaire, produit, quotient.	

II. L'ensemble des nombres réels

II.1. Rappels et pré-requis

Ensembles usuels de nombres

Il convient d'emblée de bien comprendre que la notion de nombre réel repose :

- ***sur l'intuition géométrique*** de ***droite munie d'un repère***, qui contient en elle-même l'idée de ***continuité*** ;
- ***sur les intuitions algébriques*** de ***corps*** (voir la définition 4.7) et de ***relation d'ordre compatible avec les opérations*** (voir les définitions 2.1 et 3.1).

À ce titre les trois définitions précédentes ***doivent être revues et réapprises*** si besoin est.

On rappelle de plus que :

- $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont trois exemples de corps, les ***deux premiers uniquement étant munis d'une relation d'ordre totale compatible avec leurs opérations*** ;
- on a la suite d'inclusions strictes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{N}{10^n}$ avec $(N,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
- on appelle ***nombres irrationnels*** les éléments de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Définition 8.1 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si pour tout $x \in E$, $x \leqslant M$.

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si pour tout $x \in E$, $m \leqslant x$.

Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Définition 8.2 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus grand élément*** $G \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***maximum de*** E si G est un majorant de E qui appartient à E.
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus petit élément*** $P \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***minimum de*** E si P est un minorant de E qui appartient à E.

Proposition 8.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

II.2. Propriété de la borne supérieure, inférieure

Définition 8.4 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $\mathcal{A}$ une partie ***non vide*** de $\mathbb{R}$. ***Lorsque ces nombres existent*** :

- on dit que S est ***la borne supérieure*** de $\mathcal{A}$ si S est ***le plus petit majorant*** de $\mathcal{A}$;
- on dit que I est ***la borne inférieure*** de $\mathcal{A}$ si I est ***le plus grand minorant*** de $\mathcal{A}$.

Notation

À condition que l'un ou l'autre existe, on note $S = \sup \mathcal{A}$ et $I = \inf \mathcal{A}$.

Ex. 8.1 Pour les ensembles suivants, donner, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure :
$\mathbb{N}$, $]1;2]$, $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < 2\}$

Remarque

Si $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément, alors cet élément est aussi la borne supérieure de $\mathcal{A}$.
En effet, soit G le plus grand élément de $\mathcal{A}$, alors par définition G est un majorant. De plus, soit M un majorant de $\mathcal{A}$, alors $\forall x \in \mathcal{A}, M \geqslant x$. Or $G \in \mathcal{A}$, donc $M \geqslant G$.
De même si $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, alors c'est aussi la borne inférieure de $\mathcal{A}$.
Les réciproques sont fausses (voir exercice précédent).

Axiome 8.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ ou *propriété de la borne supérieure*)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne inférieure.

Remarque

Cette propriété distingue le corps des nombres réels de celui des nombres rationnels. Elle ***doit être connue***. Elle exprime la ***continuité*** de la droite réelle et complète la remarque précédente : pour une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$

- $\mathcal{A}$ majorée ***équivaut à*** $\sup \mathcal{A}$ existe;
- $\max \mathcal{A}$ existe ***implique*** $\sup \mathcal{A}$ existe, mais la réciproque est fausse.

L'ensemble des majorants d'une partie quelconque $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est

- vide si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée,
- $\mathbb{R}$ si $\mathcal{A}$ est vide,
- l'intervalle $[\sup \mathcal{A}; +\infty[$ sinon. En effet, d'après l'axiome précédent, l'ensemble des majorants possède toujours un plus petit élément si $\mathcal{A}$ est non vide majoré, c'est la borne supérieure.

Ces remarques s'adaptent à la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour démontrer que S est la borne supérieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$ majorée on montre :

1) que S est un majorant de $\mathcal{A}$;
2) que tout majorant de $\mathcal{A}$ est supérieur ou égal à S.

Pour obtenir la borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, on peut aussi commencer par calculer l'ensemble des majorants, puis obtenir le plus petit d'entre eux.
La méthode s'adapte à l'obtention de la borne inférieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Ex. 8.2 Montrer que $\sup \mathcal{E} = \sqrt{2}$ (où $\mathcal{E}$ est défini dans l'exercice précédent).

II.3. Partie entière d'un nombre réel

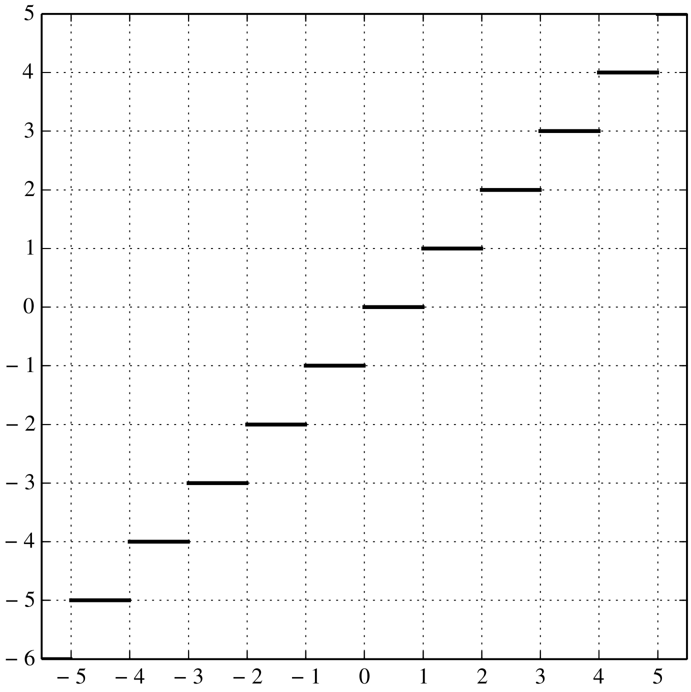
Définition 8.6

Pour tout réel x, on appelle ***partie entière de*** x le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x.
Cet entier existe toujours d'après la propriété 2.5 (propriété fondamentale des entiers).

Notation

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$



Propriété 8.7

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
3) Si $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R}$,

1) $\lfloor x \rfloor \leq x$ par définition.
   De plus, $\lfloor x \rfloor + 1 > \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$; or $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, donc $\lfloor x \rfloor + 1 > x$.
2) À nouveau, par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x$.
   De plus $x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow x - 1 < \lfloor x \rfloor$.
3) Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant x$ alors $\lfloor x \rfloor$ étant le plus grand entier vérifiant cette propriété $\lfloor x \rfloor \geqslant n$.
4) Évident.
5) Soit $m \in \mathbb{Z}$. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + m \leq x + m < \lfloor x \rfloor + m + 1$.
   Donc $\lfloor x \rfloor + m = \lfloor x + m \rfloor$.

Méthode

Les deux premières propriétés ci-dessus permettent de traiter la plupart des problèmes faisant intervenir la fonction partie entière. ***Il faut donc absolument les connaître***.

Ex. 8.3

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^n & = & a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^2 & = & a_n^2 - 1 \end{cases}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \right\rfloor$ est un entier impair.

Cor. 8.3

1) On le démontre par récurrence :
   - ***Initialisation***
     $(2+\sqrt{3})^0 = 1 + 0\sqrt{3}$, on a donc $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $3b_0^2 = 0 = a_0^2 - 1$.
   - ***Hérédité***
     Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et démontrons-la au rang $n+1$.
     $(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3}) \times (2+\sqrt{3})^n = (2+\sqrt{3})\left(a_n + b_n\sqrt{3}\right) = 2a_n + 3b_n + \sqrt{3}\,(a_n + 2b_n)$.
     Donc $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n \in \mathbb{N}$.
     Par ailleurs $3b_{n+1}^2 = 3a_n^2 + 12b_n^2 + 12a_nb_n$ et $a_{n+1}^2 - 1 = 4a_n^2 + 9b_n^2 + 12a_nb_n - 1$.
     Or par hypothèse de récurrence $3b_n^2 = a_n^2 - 1$ donc
     $3b_{n+1}^2 = 3a_n^2 + 9b_n^2 + a_n^2 - 1 + 12a_nb_n = 4a_n^2 + 9b_n^2 + 12a_nb_n - 1 = a_{n+1}^2 - 1$.
   - ***Conclusion*** : la propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n} = (2+\sqrt{3})^n$.
   Or d'après la question précédente,
   $\forall n \in \mathbb{N}, (2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} = a_n + \dfrac{\sqrt{a_n^2-1}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 1$ (récurrence immédiate) donc $(a_n-1)^2 \leqslant a_n^2 - 1 < a_n^2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 2a_n - 1 \leqslant (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$.
   On en conclut que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \right\rfloor = 2a_n - 1$ est un entier impair.

II.4. Approximations décimales

Définition 8.8

$(x_0; x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $|x - x_0| \leq \epsilon$, on dit que x_0 est ***une approximation décimale*** de x à ϵ près. De plus :
si $x_0 > x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***excès***.
si $x_0 < x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***défaut***.

Théorème 8.9 (Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$)

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \exists x \in \mathbb{D} \text{ tel que } a < x < b$$

Démonstration hors programme

Soient $a < b$ deux réels. On a donc $b - a > 0$.
Notons $n = \lfloor \log_{10}(b-a) \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$.
$n + 1 \leqslant \log_{10}(b-a) < n + 2 \Rightarrow 10^{n+1} \leqslant b - a < 10^{n+2} \Rightarrow 10 \leqslant \dfrac{b-a}{10^n} < 100.$
On en déduit que $\dfrac{a}{10^n} < \dfrac{a}{10^n} + 10 \leqslant \dfrac{b}{10^n}$.
On conclut en posant $N = \left\lfloor \dfrac{a}{10^n} + 9 \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ *qui vérifie* $\dfrac{a}{10^n} < N \leqslant \dfrac{a}{10^n} + 9 < \dfrac{b}{10^n}$ *d'où* $a < \dfrac{N}{10^{-n}} < b$.

Corollaire 8.10

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. La démonstration du théorème 8.9 reste donc valable pour les rationnels.

Corollaire 8.11

Pour tout réel x et tout réel $\epsilon > 0$, il existe une approximation décimale de x à ϵ près, que ce soit par défaut ou par excès.

Démonstration

On applique le théorème 8.9 aux couples $(x - \epsilon; x)$ ou $(x; x + \epsilon)$.

II.5. Intervalles réels

On rappelle que les intervalles réels ont été définis au chapitre 1 page 18 pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

- ***Intervalles fermés*** :
  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

- ***Intervalles semi-ouverts*** :
  $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
  $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$.
- ***Intervalles ouverts*** :
  $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
  et $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

En particulier, $\emptyset = [1;0] =]1;0] =]0;0[$ est un intervalle réel (à la fois fermé, semi-ouvert et ouvert).

Remarque

Le théorème 8.9 peut s'énoncer à l'aide des intervalles sous la forme :
« Pour tout intervalle réel I ouvert non vide, il existe un nombre décimal d tel que $d \in I$ ».

Lemme 8.12

Étant donnée une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$:

1) si $\mathcal{A}$ est majorée et possède par conséquent une borne supérieure S, alors quel que soit $x < S$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x' \leqslant S$;
2) si $\mathcal{A}$ est minorée et possède par conséquent une borne inférieure I, alors quel que soit $x > I$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x > x' \geqslant I$;
3) si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x'$;
4) si $\mathcal{A}$ n'est pas minorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x' < x$.

Démonstration

1) S est la borne supérieure de $\mathcal{A}$ et $x < S$ donc x n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$. Donc il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x'$.
2) La démonstration est identique au sens des inégalités près.
3) C'est la négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathcal{A}, x' \leqslant x$.
4) C'est la négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathcal{A}, x' \geqslant x$.

Proposition 8.13

Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous u et v dans $\mathcal{X}$, on a $[u,v] \subset \mathcal{X}$.

Démonstration

Pour l'ensemble vide, c'est évident puisqu'il n'a aucun élément ! Supposons donc $\mathcal{X}$ non vide.
Sens direct : c'est une simple application de la transitivité de la relation d'ordre appliquée à chacun des neuf types d'intervalle.
Réciproque : soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (u;v)\mathcal{X}^2, [u,v] \subset \mathcal{X}$.

- Si $\mathcal{X}$ est borné, alors il possède une borne inférieure a et une borne supérieure b (puisqu'il est non vide).
  Soit $x \in \mathcal{X}$ alors $a \leqslant x \leqslant b$ puisque a minore $\mathcal{X}$ et b majore $\mathcal{X}$. Donc $\mathcal{X} \subset [a;b]$.

Réciproquement soit $x \in]a;b[$. D'après le lemme précédent, comme $a = \inf \mathcal{X}$ et $b = \sup \mathcal{X}$, il existe $u, v \in \mathcal{X}$ tels que $a \leqslant u < x < v \leqslant b$. Or par hypothèse $[u;v] \subset \mathcal{X}$ donc $x \in \mathcal{X}$.
On distingue alors quatre cas suivant que a ou b sont ou non élément de $\mathcal{X}$:

- ⋆ si $a \in \mathcal{X}$ et $b \in \mathcal{X}$, alors $[a;b] = \mathcal{X}$;
- ⋆ si $a \notin \mathcal{X}$ et $b \in \mathcal{X}$, alors $]a;b] = \mathcal{X}$;
- ⋆ si $a \in \mathcal{X}$ et $b \notin \mathcal{X}$, alors $[a;b[= \mathcal{X}$;
- ⋆ si $a \notin \mathcal{X}$ et $b \notin \mathcal{X}$, alors $]a;b[= \mathcal{X}$.

- Si $\mathcal{X}$ est majoré mais non minoré, alors il possède une borne supérieure b mais pas de borne inférieure et $\mathcal{X} \subset]-\infty;b]$.
Soit $x \in]-\infty;b[$. D'après le lemme, il existe $u, v \in \mathcal{X}$ tels que $u < x < v \leqslant b$. Or par hypothèse $[u;v] \subset \mathcal{X}$ donc $x \in \mathcal{X}$. On distingue à nouveau deux cas suivant que b est ou non élément de $\mathcal{X}$ qui permettent de conclure que $\mathcal{X} =]-\infty;b[$ ou $\mathcal{X} =]-\infty;b]$.
- On démontre de même les trois autres cas possibles correspondant à $\mathcal{X}$ minoré mais non majoré (avec $a = \inf \mathcal{X}$ appartenant ou non à $\mathcal{X}$) et à $\mathcal{X}$ non minoré et non majoré qui conduit à $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Ex. 8.4 (Cor.) [∗] A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x;y) \in A \times B, x \leq y$.

1) Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2) Montrer que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists (x;y) \in A \times B, y - x < \epsilon$.

III. Introduction aux suites

III.1. Définitions

Définition 8.14 (Suites)

On appelle ***suite réelle*** tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ***suite complexe*** tout élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Par extension, si A est une ***partie infinie*** de $\mathbb{N}$, tout élément de $\mathbb{R}^A$ est aussi appelé suite réelle et tout élément de $\mathbb{C}^A$ est aussi appelé suite complexe.

Dans ce qui suit, on notera $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ est une suite, on préfère généralement comme pour les familles finies la notation u_0, u_1, u_2, etc… pour les images de la suite u.
On peut cependant aussi noter $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$etc… ces images.
La ***suite elle-même*** est notée u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Attention à ne pas confondre u_n ***qui est l'image de*** n ***par la suite*** u ***et*** u ***elle-même***.

Remarque

De façon évidente, la restriction $u_{|I}$ d'une suite à une partie finie $I \subset \mathbb{N}$ est une famille finie. Les notions de suite et de famille finie sont donc intimement liées.

Définition 8.15 (Égalité de deux suites)

Deux suites u et v sont ***égales*** si :

- elles sont ***définies sur la même partie*** $A \subset \mathbb{N}$;
- $\forall n \in A, u_n = v_n$.

On supposera à partir de maintenant que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ sauf indication contraire.

Définition 8.16 (Suites particulières)

Étant donnée u une suite réelle ou complexe, on dit :

- que u est ***constante*** s'il existe un réel ou un complexe a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$;
- que u est ***stationnaire*** s'il existe un réel ou un complexe a et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$;
- que u est ***périodique*** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n + p \in A$ et $u_{n+p} = u_n$.
  La période de la suite est alors le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant cette propriété.

Remarque

Une définition alternative du mot ***période*** désigne ***tout entier satisfaisant la propriété donnée***. Auquel cas, il existe ***une infinité de périodes*** pour une suite périodique et on demandera souvent de donner ***la plus petite période*** de la suite.

Définition 8.17 (Propriété valable « à partir d'un certain rang »)

Étant donné un prédicat P dépendant d'une variable $x \in \mathbb{K}$, on dira que la suite u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $P(u_n)$ soit vraie.

Ex. 8.5 Écrire à l'aide de quantificateurs :
u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow P(u_n)$
ou plus simplement $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, P(u_n)$
Reformuler le fait qu'une suite est stationnaire.
u est stationnaire si et seulement si u est constante à partir d'un certain rang.

III.2. Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de multiples façons. On retiendra les trois modes de définition suivants illustrés chacun par un exercice :

a) De façon explicite

Ex. 8.6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = (-1)^n \end{cases}$.
Montrer que u est périodique et préciser sa période.

Cor. 8.6

sin est 2π périodique donc
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+6)} = u_{2n+12} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+6)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n + 4\pi\right) = u_{2n}$.
De même, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+6)+1} = u_{2n+1+12} = (-1)^{n+6} = (-1)^n = u_{2n+1}$.
Donc u est périodique.
Par ailleurs $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_3 = -1$, $u_4 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $u_5 = 1$, $u_6 = 0$, $u_7 = -1$, $u_8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_9 = 1$, $u_{10} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ et $u_{11} = -1$, donc la période de u est 12.

b) De façon implicite

Ex. 8.7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $e^{u_n} - 1 = u_n + n$.

Cor. 8.7

Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^x - x - n - 1$. f_n est dérivable comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$ et ne s'annule qu'en $x = 0$.
f_n est donc une fonction ***continue***, ***strictement croissante*** sur $\mathbb{R}_+$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-n; +\infty[$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \in [-n; +\infty[$, donc $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est u_n !

c) Par récurrence

Ex. 8.8 On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} & u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$.
Montrer que lorsqu'elle est définie, cette suite est périodique. On précisera notamment les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est définie et la période de la suite suivant la valeur de u_0.

Cor. 8.8

Si $u_0 = 1$, u_1 n'est pas définie. De même, si $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et u_2 n'est pas définie. Enfin, si $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et u_3 n'est pas définie. Réciproquement, $u_{n+1} \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow u_n \in \{-1; 0\}$, donc la suite u est bien définie pour tout $u_0 \in \mathbb{C}\backslash\{-1; 0; 1\}$.
Montrons que la suite est alors périodique. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{1+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{2}{-2u_n} = \dfrac{-1}{u_n}$. La suite u est donc périodique de période 4 pour tout $u_0 \in \mathbb{C}\backslash\{-1; 0; 1; i; -i\}$ et constante (c'est-à-dire 1-périodique) pour $u_0 = \pm i$.

Remarque

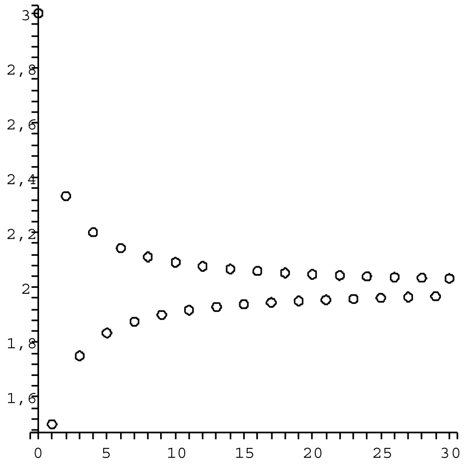
Dans le cas d'une suite définie par récurrence, la ***démonstration par récurrence*** est un outil ***indispensable***. Il faut toujours l'avoir à l'esprit.

III.3. Définitions spécifiques aux suites réelles

Définition 8.18 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une ***suite réelle*** u est l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n) obtenu lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.



Définition 8.19 (Représentation graphique d'une suite récurrente)

Lorsque la suite est définie par récurrence $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$, il est souvent plus aisé pour observer son « comportement » (on parle plutôt de sa ***dynamique***) de la représenter graphiquement en traçant la représentation graphique de la fonction f, la droite d'équation $y = x$, puis en utilisant ces deux représentations graphiques pour obtenir de proche en proche les valeurs des termes de la suite u sur l'axe des abscisses.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : \begin{cases} u_0 & = & \frac{4}{5} \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2+u_n}{2} \end{cases}$.

Définition 8.20 (Suites majorées, minorées)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***majorée*** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***minorée*** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.

Remarque

Comme il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$, les notions de suites majorées et minorées ne sont pas définies sur $\mathbb{C}$. Cependant, la définition suivante est valable pour les suites réelles ***et complexes*** :

Définition 8.21 (Suites bornées)

On dit qu'une suite ***réelle ou complexe*** u est ***bornée*** si la suite réelle $|u|$ est majorée.

Proposition 8.22

Une suite ***réelle*** u est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Démonstration

Par définition, u est bornée si et seulement $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant A$, c'est-à-dire si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, -A \leqslant u_n \leqslant A$. Donc u est minorée par $-A$ et majorée par A.
Réciproquement, supposons u minorée par $m \in \mathbb{R}$ et majorée par $M \in \mathbb{R}$ alors
$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, -M \leqslant -u_n \leqslant -m$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n| \leqslant \max(M; -m)$ donc u est bornée.

Définition 8.23 (Suites monotones)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***croissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est ***strictement*** croissante ou ***strictement*** décroissante, et par conséquent ***strictement*** monotone.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite u on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Cependant, dans le cas d'une suite $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ définie par récurrence,
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ dépend de la valeur de u_n.
Dans ce cas, pour montrer que la suite est monotone, on cherchera des ***intervalles*** $I \subset \mathbb{R}$ tels que

- $\forall x \in I, f(x) \in I$: on dit que l'intervalle I est ***stable par*** f ;
- g est de signe constant sur I.

Cette méthode sera précisée lors du chapitre sur la continuité.

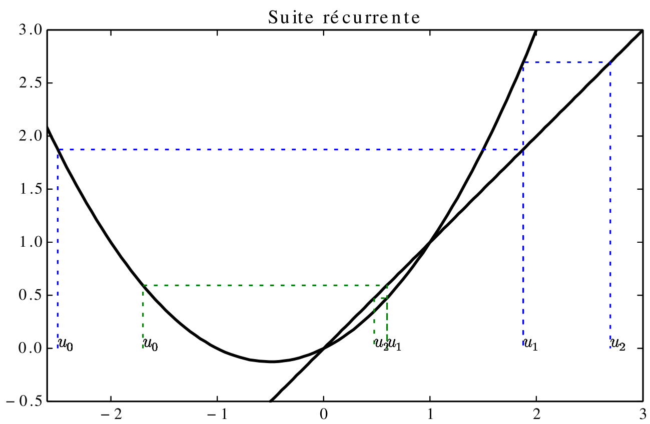
Ex. 8.9 Soit $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ (voir représentation graphique précédente).
Montrer que si $u_0 \in [0; 1]$, alors u est décroissante.

Cor. 8.9

1) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^2 + x}{2}$. f est dérivable car polynômiale, et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x + \frac{1}{2}$. Donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, enfin f est continue, donc f est une bijection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.
Une récurrence immédiate montre alors que si $u_0 \in [0; 1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 - u_n}{2}$ en posant $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^2 - x}{2}$.
À nouveau, g est dérivable car polynômiale et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x - \frac{1}{2}$ donc g est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Or $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$ donc sur $[0; 1]$, $g \leqslant 0$.
Nous avons donc démontré que $u_0 \in [0; 1] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$ et $u_n \in [0; 1] \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
La conjonction de ces deux propriétés permet d'affirmer que si $u_0 \in [0; 1]$ alors u est décroissante.

2) On cherche des intervalles stables par f tels que g soit de signe constant sur ces intervalles.
Étudions f. D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$ avec $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \dfrac{-1}{8}$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Cherchons les antécédents par f de 0 et de 1.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **ou** $x = -1$.
$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ **ou** $x = -2$.
Enfin, toujours d'après l'étude de la question précédente, g est positive sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$, et négative sur $[0; 1]$.
On distingue alors cinq cas :
- si $u_0 \in]-\infty; -2]$ alors $u_1 \in [1; +\infty[$ et cet intervalle est stable par f avec g positive. Donc $u_0 \in]-\infty; -2] \Rightarrow u$ croissante.
- si $u_0 \in]-2; -1[$, $u_1 \in]0; 1[$ et u n'est pas monotone puisque $u_1 > u_0$ puis, d'après la première question $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} < u_n$.
- si $u_0 \in [-1; 0]$, $u_1 \in \left[\frac{-1}{8}; 0\right]$, ce dernier intervalle étant stable par f. De plus, g est positive sur $\left[\frac{-1}{8}; 0\right]$.
  On en déduit que $u_0 \in [-1; 0] \Rightarrow u$ croissante.
- si $u_0 \in [0; 1]$, u est décroissante d'après la première question.
- enfin, si $u_0 > 1$, la suite est croissante d'après le premier cas traité.



En conclusion, u est monotone si et seulement si $u_0 \in]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$.

IV. Suites arithmétiques, géométriques et récurrentes linéaires

IV.1. Suites arithmétiques

Définition 8.24

Une suite u est dite ***arithmétique*** s'il existe un nombre r (réel ou complexe) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 8.25

u est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

Sens direct : on suppose la suite arithmétique et on démontre la formule explicite par récurrence sur n.

- ***Initialisation*** : elle est évidente.
- ***Hérédité*** : supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ avec r la raison de la suite arithmétique.
  Alors par définition, $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + (n+1)r$.
- ***Conclusion*** : si u est une suite arithmétique, alors $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Réciproque : supposons $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$. Alors $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = u_n + r$. ce qui prouve que u est une suite arithmétique de raison r.

Proposition 8.26 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n\frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section III.4.

IV.2. Suites géométriques

Définition 8.27

Une suite u est dite ***géométrique*** s'il existe un nombre q (réel ou complexe) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.
q est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 8.28

u est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

Démonstration

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites arithmétiques.

Proposition 8.29 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1} \frac{1-q^n}{1-q}$$

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section III.4.

Corollaire 8.30

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$, $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

IV.3. Suites récurrentes linéaires

Définition 8.31

On appelle ***suite arithmético-géométrique*** toute suite définie pour $a, b \in \mathbb{K}$ par u :
$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+1} & = & au_n + b \end{cases}$$

Remarque

Si $a = 1$, on retrouve le cas particulier des suites arithmétiques, et si $b = 0$ on retrouve celui des suites géométriques.

Proposition 8.32

Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit u une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ $(a \neq 1)$. Alors :

u est la somme d'une suite géométrique v de raison a et d'une suite constante c ***vérifiant la même relation de récurrence que*** u.

Démonstration

Par analyse-synthèse.

Remarque

On peut faire une analogie entre les suites arithmético-géométriques et les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (aussi curieux que cela puisse paraître au premier abord !).

En effet, considérons l'équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Pour obtenir ses solutions, il faut :

- résoudre l'équation homogène $y' = ay$ dont les solutions sont $y = \lambda e^{at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- obtenir une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$, or ici la solution constante $y = \dfrac{-b}{a}$ convient.

Donc les solutions de l'équation différentielle sont somme d'une exponentielle et d'une solution particulière constante.

Définition 8.33

On appelle ***suite récurrente linéaire d'ordre 2*** toute suite définie pour $a, b \neq 0 \in \mathbb{K}$ par

$$u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_1 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+2} & = & au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On appelle ***équation caractéristique associée*** à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$

$$r^2 - ar - b = 0, \text{ de discriminant } \Delta = a^2 + 4b$$

Proposition 8.34

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu) z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu) z_0 = (\lambda + u_0) z_0$.

Démonstration

La démonstration sera faite ultérieurement conformément au programme.

Remarque

- On remarquera ***la très grande ressemblance entre les propositions précédentes*** et ***celles concernant les équations différentielles linéaires*** du chapitre 7, section V. Cette ressemblance entre des objets à priori très éloignés sera expliquée dans les chapitres sur les espaces vectoriels et justifie l'usage répété du mot ***linéaire*** pour qualifier ces objets.
- ***Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants***, la proposition 8.34 s'adapte lorsque $u_0, u_1, a, b \in \mathbb{R}$ à l'obtention d'une formule explicite pour les suites réelles :
  - ⋆ si $\Delta > 0$, on écrit $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions ***réelles*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
  - ⋆ si $\Delta = 0$, on écrit $u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$ où z_0 est l'unique solution ***réelle*** double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + u_0) z_0$;
  - ⋆ si $\Delta < 0$, on écrit $u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les deux solutions ***complexes conjuguées*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \lambda$ et $u_1 = r\,[u_0 \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)]$.

Méthode : Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires

- Pour une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$, ***on retient uniquement*** qu'une formule explicite est obtenue comme ***somme d'une suite géométrique de raison*** a ***et d'une solution particulière constante de la formule de récurrence***. Le premier terme de la suite géométrique peut être facilement obtenu par le calcul du premier terme de u.
- Pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$, ***on retient uniquement*** la formule explicite suivant les valeurs du discriminant. Les valeurs de λ, μ peuvent être facilement obtenues par le calcul des deux premiers termes de u.

  On est aidé en cela par la ressemblance entre la méthode vue pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et celle énoncée dans la proposition 8.34 et la remarque suivante.

Ex. 8.10 ***Suite de Fibonacci***
Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.

Cor. 8.10

Équation caractéristique : $z^2 - z - 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ donc
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$
Or $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et
$u_1 = 1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\lambda+\mu}{2} + \sqrt{5}\frac{\lambda-\mu}{2}$

donc $\lambda = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\mu = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ex. 8.11 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Comment aurait-on pu obtenir la formule explicite sans le recours à la méthode du cours ?

Cor. 8.11

Équation caractéristique : $z^2 - 2z + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$ donc
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n + \mu$.
Or $u_0 = 0 = \mu$ et
$u_1 = 3 = \lambda$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n$$

Il s'agit alors d'expliquer pourquoi cette suite est arithmétique : d'après la formule de récurrence donnée pour u on a
$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \ldots = u_1 - u_0 = 3$ donc il s'agit bien d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison 3.

Ex. 8.12 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ et montrer que cette suite est périodique.

Cor. 8.12

Équation caractéristique : $z^2 - z + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \mu\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \lambda e^{i\frac{n\pi}{3}} + \mu e^{-i\frac{n\pi}{3}}$.
Or $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et
$u_1 = 1 = \lambda\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \mu\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\lambda+\mu}{2} + i\sqrt{3}\dfrac{\lambda-\mu}{2}$
donc $\lambda = \dfrac{1+\frac{1}{i\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{6}$ et $\mu = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{6}$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3-i\sqrt{3}}{6}e^{i\frac{n\pi}{3}} + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+6} = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{6}e^{i\frac{n\pi}{3}+2i\pi} + \dfrac{3+i\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{n\pi}{3}-2i\pi} = u_n$.
Or $u_0 = u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = u_4 = -1, u_5 = 0$ donc u est périodique de période 6.

Ex. 8.13 (Cor.) Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Simplifier $u_{100} + u_{101}$. Ce résultat se généralise-t-il ?

Important ! Ressemblance... oui mais !

Les équations différentielles linéaires sont données sous la forme $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ tandis que les suites récurrentes linéaires vérifient
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0, b \neq 0$ ce qui explique la légère différence entre les équations caractéristiques associées (et leur discriminant).
En outre, si $\Delta = 0$ par exemple, la solution générale de $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ s'écrit $y = (\lambda x + \mu)e^{z_0 x}$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique tandis que la formule explicite obtenue pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$ est $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique.

IV.4. Démonstration par récurrence double

Méthode : Démonstration par récurrence double

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence double*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***et*** $P(n_0+1)$ ***sont vrais***.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, ***en énonçant clairement ces propriétés appelées hypothèses de récurrence***. On démontre alors, sous ces hypothèses, que $P(n+2)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : « ***La propriété est initialisée aux rangs*** n_0 ***et*** n_0+1 ***et héréditaire pour*** $n \geqslant n_0$***, elle est donc vraie pour tout entier*** $n \geqslant n_0$***.*** »

En résumé, on démontre :

$$\overbrace{P(n_0) \text{ et } P(n_0+1)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$$

Ex. 8.14 ***Suite de Fibonacci (bis)***
Sans utiliser la formule explicite obtenue à l'exercice 8.10, montrer que la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ vérifie :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

Cor. 8.14

1) Par récurrence ***double*** sur $n \in \mathbb{N}$:
   - ***Initialisation*** :
     $u_0 = 1 \geqslant 0$
     $u_1 = 1 \geqslant 1$
     $u_2 = 2 \geqslant 2$
   - ***Hérédité*** : supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$. Alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant n + 1 + n \geqslant n + 2$ ***car*** $n > 0$.
   - ***Conclusion*** : la propriété est vraie aux rangs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, et héréditaire

pour $n \in \mathbb{N}^*$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On voit ici que pour démontrer l'hérédité, on est conduit à supposer $n > 0$***, donc à initialiser la propriété aux rangs*** $n = 0$***,*** $n = 1$ ***et*** $n = 2$***.***

2) Une récurrence ***faible*** (ou simple) suffit :

- ***Initialisation*** :
  $u_0u_2 - u_1^2 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$
- ***Hérédité*** : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_nu_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$. Alors :
  $u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+2}(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}^2 - u_nu_{n+2} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.
- ***Conclusion*** : la propriété est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_nu_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$$

V. Limite d'une suite réelle

Dans cette section, les suites considérées sont des ***des suites réelles***.

V.1. Limite finie

Définition 8.35

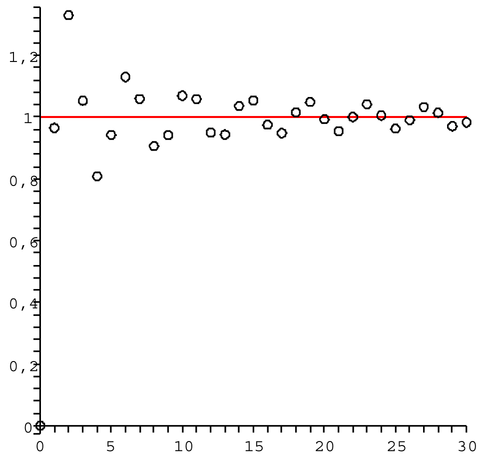
On appelle ***intervalle non trivial*** de $\mathbb{R}$ tout intervalle non vide et non réduit à un point.

Définition 8.36

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** le réel α (ou ***converge vers*** α) si tout intervalle fermé non trivial centré sur α contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.α est appelé ***limite de la suite*** u.
Une suite ***qui converge vers un nombre réel*** est dite ***convergente***.
Sinon, elle est dite ***divergente***.

Notation

Avec des quantificateurs cela s'écrit : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$.
On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$.



Remarque

- N dépend à priori de ϵ et généralement, plus ϵ est petit, plus N doit être choisi grand.
- Il découle immédiatement de la définition que
  $|u_n| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Méthode

Pour montrer qu'une suite u converge vers α ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $\epsilon > 0$
   « ***Soit*** $\epsilon > 0$***.*** »
2) on trouve un rang N adapté à ϵ
   « ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout entier*** $n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$***.*** »

On peut aussi faire une démonstration par analyse/synthèse.

Ex. 8.15 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Cor. 8.15

Soit $\epsilon > 0$***. Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout entier*** $n \geq N, \left|\frac{1}{n}\right| \leqslant \epsilon$***.***
On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1 > 0$. Par définition de la partie entière, $N - 1 \leqslant \dfrac{1}{\epsilon} < N$.
Donc quel que soit l'entier $n \geqslant N$,
$n \geqslant N > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \epsilon$ ce qui permet de conclure.

V.2. Unicité de la limite d'une suite convergente

Lemme 8.37

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$x = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x| \leqslant \epsilon$

Démonstration

Sens direct : il est évident.

Réciproque : on démontre la contraposée.

Supposons $x \neq 0$ alors $\epsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0$ et vérifie $\epsilon < |x|$.

Donc $x \neq 0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0, \epsilon < |x|$ ce qui achève la démonstration.

Proposition 8.38

La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration

Supposons que la suite u converge vers les réels $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha' \in \mathbb{R}$. Alors

$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$

$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - \alpha'| \leqslant \epsilon$

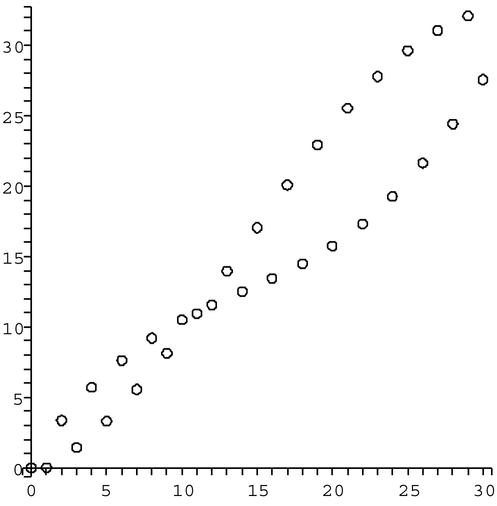
Donc $\forall \epsilon > 0, \forall n \geq \max(N_1, N_2), |\alpha - \alpha'| \leqslant |u_n - \alpha| + |u_n - \alpha'| \leqslant 2\epsilon$.

Ainsi, $\forall \epsilon > 0, \dfrac{|\alpha - \alpha'|}{2} \leqslant \epsilon$ ce qui permet de conclure que $\alpha = \alpha'$ en utilisant le lemme précédent.

V.3. Limite infinie

Définition 8.39

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** $+\infty$ (ou ***diverge vers*** $+\infty$) si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.



Notation

Avec des quantificateurs :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 8.40

De même, on dit que u ***tend vers*** $-\infty$ (ou ***diverge vers*** $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A$.

Remarque

N dépend à priori de A et plus $|A|$ est grand, plus N doit être choisi grand.

Méthode

Pour montrer qu'une suite u diverge vers $\pm\infty$ ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $A \in \mathbb{R}$
« ***Soit*** $A \in \mathbb{R}$***.*** »

2) on trouve un rang N adapté à A
« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \geqslant A$ »
pour une suite divergeant vers $+\infty$
ou
« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \leqslant A$ »
pour une suite divergeant vers $-\infty$.

On peut aussi faire une démonstration par analyse synthèse.

Ex. 8.16 Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Cor. 8.16

Soit $A \in \mathbb{R}$***. Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout entier*** $n \geqslant N, n^p \geqslant A$***.***
Si $A \leqslant 0$, il suffit de prendre $N = 0$.
Sinon, on pose $N = \left\lfloor A^{\frac{1}{p}} \right\rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, $N - 1 \leqslant A^{\frac{1}{p}} < N$.
Donc quel que soit l'entier $n \geqslant N$,
$n \geqslant N > A^{\frac{1}{p}} \Rightarrow n^p \geqslant A$ ce qui permet de conclure.

Proposition 8.41

La limite (finie ou infinie) d'une suite est unique.

V.4. Propriété

Propriété 8.42

Si u est une suite convergente alors elle est bornée.
Si u diverge vers $\pm\infty$ alors elle n'est pas bornée.
Les réciproques sont fausses en général.

Démonstration

- Si u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \epsilon$.
En particulier, cette propriété est vraie pour $\epsilon = 1$ associé à l'entier $N_1 \in \mathbb{N}$.
On a alors $U_1 = \{u_n \in \mathbb{R}, 0 \leqslant n < N_1\}$ qui est une partie finie de $\mathbb{R}$ et possède donc un maximum G et un minimum P (propriété 3.5) et $U_1' = \{u_n \in \mathbb{R}, 0 \leqslant n \geqslant N_1\}$ qui est majorée par $l + 1$ et minorée par $l - 1$.
Donc la suite u est majorée par $\max(G; l + 1)$ et minorée par $\min(P; l - 1)$.
- Pour la seconde propriété, on montre la contraposée : si u est bornée, alors elle ne

diverge pas vers $\pm\infty$.
En effet, supposons que u soit majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors pour tout $A > M$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < A$ donc la suite ne tend pas vers $+\infty$.
La démonstration est similaire pour une suite minorée : elle ne tend pas vers $-\infty$.

V.5. Opérations sur les limites finies

Théorème 8.43

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ alors

1) Combinaisons linéaires : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$.
2) Produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l_1 l_2$.
3) Quotient : si $l_1 \neq 0$, alors $\dfrac{v}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{l_2}{l_1}$.

Démonstration

1) Il s'agit de montrer que sous les conditions données, $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l_1 + \mu l_2)\right| \leqslant \epsilon$.
Or $\left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l_1 + \mu l_2)\right| \leqslant \left|\lambda\,(u_n - l_1)\right| + \left|\mu\,(v_n - l_2)\right|$ par inégalité triangulaire.
Soit $\epsilon > 0$. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, d'après les hypothèses,
$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - l_1| \leqslant \frac{\epsilon}{2|\lambda|}$ et
$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, |v_n - l_2| \leqslant \frac{\epsilon}{2|\mu|}$.
En remplaçant dans l'inégalité triangulaire, on obtient donc
$\forall n \geqslant \max(N_1; N_2), \left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l_1 + \mu l_2)\right| \leqslant \left|\lambda\,(u_n - l_1)\right| + \left|\mu\,(v_n - l_2)\right| \leqslant \epsilon$ ce qui achève la démonstration.
Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, l'un au moins des deux termes de $\lambda u_n + \mu v_n$ est nul et le résultat reste valide.
Remarque : on aurait pu majorer $|u_n - l_1|$ et $|v_n - l_2|$ par ϵ ce qui aurait conduit à $\left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l_1 + \mu l_2)\right| \leqslant \big(|\lambda| + |\mu|\big)\epsilon$ sans rien changer à la validité de la démonstration.
C'est ce que nous ferons désormais.
2) Soit $\epsilon > 0$.
$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - l_1| \leqslant \epsilon$ et
$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, |v_n - l_2| \leqslant \epsilon$.
D'où $\forall n \geqslant \max(N_1; N_2), \left|u_n v_n - l_1 l_2\right| \leqslant \left|u_n v_n - u_n l2 + u_n l_2 - l_1 l_2\right| \leqslant |u_n| \times \left|v_n - l_2\right| + |l_2| \times \left|u_n - l_1\right| \leqslant M\epsilon + |l_2|\epsilon$ où M est un majorant de $|u_n|$ ce qui achève la démonstration.
3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1 \neq 0$ alors en prenant $\epsilon = \dfrac{|l_1|}{2}$, à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ adapté, $l_1 - \dfrac{|l_1|}{2} \leqslant u_n \leqslant l_1 + \dfrac{|l_1|}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{|l_1|}{2} \leqslant |u_n|$.
Donc u ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Montrons que $\frac{1}{u} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l_1}$. Soit $\epsilon > 0$.
$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - l_1| \leqslant \epsilon$.
Or $\forall n \geqslant N_1, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{l_1-u_n}{l_1u_n}\right| \leqslant \frac{\epsilon}{l_1M}$ où M est un majorant de $|u_n|$ ce qui achève la démonstration.
Enfin, $\frac{v}{u} = \frac{1}{u} \times v$ permet de conclure en utilisant le résultat précédent.

V.6. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 8.44

Si u et v sont deux suites réelles convergeant vers l_1 et l_2 et telles que à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $l_1 \leqslant l_2$.
Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, on ne peut rien affirmer de plus : on a toujours $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration

- On le démontre par l'absurde : supposons que $l_1 > l_2$. Alors pour $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{3}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel
$|u_n - l_1| \leqslant \epsilon$, $|v_n - l_2| \leqslant \epsilon$ et $u_n \leqslant v_n$ (on prend le maximum des trois rangs donnés par l'hypothèse « à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ » et les convergences des suites u et v). On a donc
$0 < l_1 - l_2$ et $l_1 - l_2 = l_1 - u_n + u_n - v_n + v_n - l_2 \leqslant \frac{l_1 - l_2}{3} + u_n - v_n + \frac{l_1 - l_2}{3} \leqslant \frac{2(l_1 - l_2)}{3}$.
On en déduit donc que $0 < l_1 - l_2$ et $l_1 - l_2 \leqslant 0$ ce qui est absurde.
Donc $l_1 \leqslant l_2$.
- L'inégalité stricte peut être vérifiée par deux suites convergeant vers une même limite en posant par exemple $u : n \in \mathbb{N} \mapsto 0$ et $v : n \in \mathbb{N} \mapsto \frac{1}{n+1}$.

VI. Théorèmes d'existence d'une limite

VI.1. Théorèmes des gendarmes

Théorème 8.45

Si u et v sont deux suites réelles et l un réel tels que u converge vers 0 et à partir d'un certain rang $|v_n - l| \leqslant u_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 8.46 (Théorème des gendarmes)

Si u, v et w sont trois suites réelles telles que u et w convergent vers la même limite l et à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 8.47

Soient u et v deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

- Pour le théorème 8.45, la suite v converge vers l car $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |v_n - l| \leqslant u_n \leqslant \epsilon$ en prenant pour N le maximum des deux rangs donnés par l'hypothèse « à partir d'un certain rang $|v_n - l| \leqslant u_n$ » et la convergence de la suite u.
- Pour le théorème 8.46, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, l - \epsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant l + \epsilon$ en prenant pour N le maximum des trois rangs donnés par l'hypothèse « à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ » et les convergences des suites u et w.
- Pour le théorème 8.47, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors pour tout réel A, à partir d'un certain rang, $A \leqslant u_n \leqslant v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et réciproquement pour la seconde partie.

Corollaire 8.48

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

- diverge vers $+\infty$ si $a > 1$;
- est constante égale à 1 si $a = 1$ (donc converge vers 1) ;
- converge vers 0 si $-1 < a < 1$;
- n'admet pas de limite si $a \leqslant -1$.

Démonstration

- Si $a > 1$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $a^n = (1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$. D'après le théorème 8.47, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a = 1$, la proposition est évidente.
- Si $-1 < a < 1$ alors ou bien $a = 0$ et la proposition est à nouveau évidente, ou bien $a \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|a|^n} = +\infty$ d'après le premier point. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a \leqslant -1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a^{2n+1} < 0 < a^{2n}$ et d'autre part $a^{2n} - a^{2n+1} \geqslant 2$. La première assertion interdit une limite infinie, la seconde interdit une limite finie. Donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

VI.2. Suites monotones

Théorème 8.49

Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 8.50

Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 8.51 (Théorème de convergence monotone)

Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
Toute suite réelle décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Démonstration

Soit $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. $U \neq \emptyset$.

- Les deux premiers théorèmes sont des conséquences immédiates du lemme 8.12.
- Montrons le théorème de convergence monotone dans le cas d'une suite croissante majorée, la démonstration étant similaire dans le cas des suites décroissantes minorées.
  U possède une borne supérieure $S \in \mathbb{R}$ puisque $U \neq \emptyset$ est majorée.
  D'après le lemme 8.12, quel que soit $\epsilon > 0$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $S - \epsilon < u_N \leqslant S$.
  Or la suite u est croissante, donc $\forall n \geqslant N, S - \epsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant S$ (puisque S est un majorant de u), ce qui achève la démonstration.

VI.3. Suites adjacentes

Définition 8.52

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si $\begin{cases} \text{l'une est une suite croissante} \\ \text{l'autre est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$

Théorème 8.53 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Démonstration

Supposons que u soit croissante et v décroissante quitte à échanger leurs noms.
Montrons par l'absurde que tout terme de la suite v est un majorant de u.
Supposons donc qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > v_q$. La suite u étant croissante et la suite v décroissante, on en déduit immédiatement en posant $N = \max(p; q)$ que $u_N \geqslant u_p > v_q \geqslant v_N$ puis que pour tout $n \geqslant N$, $u_n - v_n > u_N - v_N > 0$ ce qui est absurde puisque $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.
Donc u est croissante majorée par tout terme de v, donc convergente, et de même v converge.
On conclut en utilisant les théorèmes opératoires sur les limites :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_n - v_n + \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$.

VII. Compléments

VII.1. Suites extraites

Définition 8.54

Étant donnée une suite u, on dit que v est une ***suite extraite*** de u s'il existe une injection croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.

Proposition 8.55

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Ex. 8.17 On donne $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)$. Expliciter les suites extraites $(v_n)_{n\in N} = (u_{6n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in N} = (u_{6n+4})_{n\in\mathbb{N}}$.
Que peut-on en conclure pour la suite u ?

Cor. 8.17

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_n = u_{6n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6n\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
$W_n = u_{6n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6n\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$
La suite u ne possède donc pas de limite.

VII.2. Suites complexes

Définition 8.56

Étant donnée une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe, on définit les suites $\mathcal{R}e\,(z) = (\mathcal{R}e\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{I}m\,(z) = (\mathcal{I}m\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $|z| = \big(|z_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 8.57

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - l| = 0$.
Sinon, on dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Notation

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.

Important !

Les limites infinies ***ne sont pas définies pour les suites complexes***.

Théorème 8.58

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{R}e\,(z_n) = \mathcal{R}e\,(l) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{I}m\,(z_n) = \mathcal{I}m\,(l) \end{cases}$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de l'égalité $|z_n - l|^2 = \mathcal{R}e\,(z_n - l)^2 + \mathcal{I}m\,(z_n - l)^2$ et de la définition des limites

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \quad\Leftrightarrow\quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |z_n - l| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \begin{cases} |\mathcal{R}e\,(z_n - l)| \leqslant \\ |\mathcal{I}m\,(z_n - l)| \leqslant \end{cases}$$

Remarque

Ce théorème permet d'étudier les suites complexes en se ramenant aux suites réelles. Il permet aussi de transférer certaines propriétés des suites réelles aux suites complexes : limite d'une somme, d'un produit, etc...

Important !

Tous les théorèmes concernant les suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre ne sont pas applicables aux suites complexes car il n'existe pas de relation d'ordre compatible avec les opérations dans $\mathbb{C}$.

VII.3. Droite numérique achevée

Définition 8.59

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Remarque

On peut prolonger les lois de $(\mathbb{R}; +; \times)$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par analogie avec les théorèmes opératoires sur les limites mais pas totalement à cause des cas d'indétermination.

Ainsi, soit $l \in \mathbb{R}$, on pose :

$l + \infty = \dots\dots\dots\dots$	$l - \infty = \dots\dots\dots\dots$
$+\infty + \infty = \dots\dots\dots\dots$	$-\infty - \infty = \dots\dots\dots\dots$
$-\infty + \infty = \dots\dots\dots\dots$	$+\infty - \infty = \dots\dots\dots\dots$

De même, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$a \times (+\infty) = \dots\dots\dots\dots$	$a \times (-\infty) = \dots\dots\dots\dots$
$b \times (+\infty) = \dots\dots\dots\dots$	$b \times (-\infty) = \dots\dots\dots\dots$
$(+\infty) \times (+\infty) = \dots\dots\dots\dots$	$(-\infty) \times (-\infty) = \dots\dots\dots\dots$
$(-\infty) \times (+\infty) = \dots\dots\dots\dots$	$(+\infty) \times (-\infty) = \dots\dots\dots\dots$
$0 \times (+\infty) = \dots\dots\dots\dots$	$0 \times (-\infty) = \dots\dots\dots\dots$

Ces tableaux peuvent être aussi vus comme des tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Ils sont complétés pour $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$.

- On retiendra enfin que les limites de la forme $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$ et 0^0 sont indéterminées.

VII.4. Exercice de synthèse

Ex. 8.18 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.
3) Calculer I_2, I_3 et I_4.
4) Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.
5) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.
6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

VIII. Correction des exercices

Cor. 8.4 :

1) En deux temps :
   - Soit $y \in B$. $\forall x \in A, x \leq y$ donc y est un majorant de A et $\sup A \leq y$.
     Nous venons de démontrer que $\forall y \in B, \sup A \leq y$.
   - Ainsi, B est minoré par $\sup A$ et $\inf B \geq \sup A$.

2) Supposons que $\sup A = \inf B$ et soit $\epsilon > 0$.
   Soit $u = \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ et $v = \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. D'après le lemme 8.12, il existe $x \in A$ tel que $u < x < \sup A$ c'est-à-dire $-\sup A < -x < -u$, et $y \in B$ tel que $\inf B < y < v$.
   En faisant la somme des deux inégalités, on obtient l'existence de $(x; y) \in A \times B$ tels que $0 < y - x < v - u = \epsilon$.
   Réciproquement, supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in A, y \in B$ tels que $y - x < \epsilon$.
   On a donc $\inf B \leqslant y < x + \epsilon \leqslant \sup A + \epsilon$. Autrement écrit et en utilisant le premier résultat démontré, pour tout $\epsilon > 0$, $\sup A \leqslant \inf B < \sup A + \epsilon$.
   Ce qui permet de conclure que $\sup A = \inf B$ (si l'on n'est pas convaincu par la précédente propriété, on fait une démonstration par l'absurde).

Cor. 8.13 : Équation caractéristique : $z^2 + z - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu (-2)^n$.
Or $u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et
$u_1 = 3 = \lambda - 2\mu$
donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$$

On a donc $u_{100} + u_{101} = 1 - (-2)^{100} + 1 - (-2)^{101} = 2 - (2^{100} - 2^{101}) = 2\,(1 + 2^{99}) = 2u_{99}$.
Ce résultat se généralise évidement puisqu'il s'agit en fait de la formule de récurrence donnée pour u !