

# Nombres réels et suites numériques

## I. L'ensemble $\mathbb{R}$

**Ex. 8.1** Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}, x \in [3; 7] \right\} \quad D = \mathbb{Q} \cap [0; \pi]$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2} :$$

$$E = \left\{ a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad F = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$G = \left\{ a + \frac{(-1)^{nb}}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

**Ex. 8.2 (Cor.)** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in A, x \leq \alpha$ .

Montrer que  $\sup A \leq \alpha$ .

Que peut-on dire si  $\forall x \in A, x < \alpha$  ?

**Ex. 8.3 (Cor.)** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $E_n = \left\{ k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

• Montrer que  $E_n$  admet une borne inférieure et que

$$\inf E_n = \min_{1 \leq k \leq n} \left( k + \frac{n}{k} \right).$$

• Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$ .

Cas d'égalité :  $\inf E_n = \sqrt{4n}$  ?

**Ex. 8.4 [\*\*]** On note  $\mathcal{A} = \{p + q\sqrt{2}, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{R}$ , et  $\mathcal{A}_+^* = \{x \in \mathcal{A}, x > 0\}$ .

a. Montrer que  $\mathcal{A}_+^*$  possède une borne inférieure.

b. Calculer  $\inf \mathcal{A}_+^*$ .

c. Montrer que  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Indication :** on pourra tenter d'adapter les deux premières questions à l'ensemble  $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathcal{A}, x > a\}$  où  $a$  est un réel quelconque.

**Ex. 8.5** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire la valeur de  $\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ .

## II. Introduction aux suites

**Ex. 8.6** Étudier la monotonie des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{1+n^2} \quad v_n = \frac{n!}{2^n} \quad w_n = \frac{n^3}{5^n} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+(-1)^n}}$$

**Ex. 8.7**

a. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

b. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :  $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

c. Soit  $u$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = n - u_n \end{cases}$ .

Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  (on demande une formule explicite).

**Ex. 8.8** Soit  $u$  la suite définie par  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, u_0 \in \mathbb{R}$ .

a. Pour quelles valeurs de  $u_0$  la suite est-elle définie ?

b. Étudier alors sa monotonie.

c. Pour quelles valeurs de  $u_0$  la suite est-elle bornée ?

**Ex. 8.9** Soit  $u$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}.$$

Étudier la suite  $u$ , préciser notamment sa limite si elle existe.

**Ex. 8.10** Soient  $a, b$  deux constantes réelles,  $u$  une suite réelle vérifiant  $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$  et  $v$  une suite réelle vérifiant  $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$ .

- Montrer sans calculer son terme général que  $u$  est périodique de période 3.
- Calculer le terme général  $u_n$  en fonction de  $n$  et retrouver le résultat précédent.
- On suppose que la suite  $v$  est **non nulle** et périodique de période  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer qu'il existe un nombre complexe  $Z = \rho e^{i\theta}$  vérifiant à la fois l'équation caractéristique  $(E_c) : Z^2 + aZ + b = 0$  et l'équation  $Z^p - 1 = 0$ .

**Indication** : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de  $(E_c)$ .

- Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.

**Indication** : en posant  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1).$$

**Ex. 8.11** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{1\dots 1}_n$  chiffres 1

### III. Limite d'une suite réelle

**Ex. 8.12** Étudier les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 2 \sin(n^2) & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + (-1)^n n & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-a^2}{1+a^2} \right)^n, a \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{2\sqrt{n} - (-1)^n} \end{aligned}$$

#### Ex. 8.13

- Simplifier pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'expression  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$ .
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$  est finie et en donner un encadrement d'amplitude 1.

#### Ex. 8.14 (Cor.)

- Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ .
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty$ .

**Ex. 8.15** Montrer que la suite  $u$  définie par  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$  est croissante quelle que soit la valeur de  $u_0 \in \mathbb{R}$ .  
Pour quelle(s) valeur(s) de  $u_0$  la suite est-elle majorée?  
Montrer l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  puis donner sa valeur.

**Ex. 8.16** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$ .

**Ex. 8.17** Montrer en utilisant des suites extraites que  $(\sin(\frac{\pi n}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

Faire de même pour  $(\cos(n\pi + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  puis pour  $(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ex. 8.18** On considère les suites définies par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer que  $u$  et  $v$  convergent vers une même limite.

**Ex. 8.19** Soit  $u$  définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ .

- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ .
- Montrer que  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

**Ex. 8.20** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ .

- Donner une construction géométrique de  $z_{n+1}$  à partir de  $z_n$ .
- Étudier cette suite dans les cas où  $z_0 = 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$ .
- Montrer que  $z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \notin \mathbb{R}$ .
- On suppose que  $z_0 \notin \mathbb{R}$ . Étudier la convergence de  $(z_n)$ .

[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

## IV. Révisions

**Ex. 8.21** Donner une formule explicite pour  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  ou  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  en envisageant successivement les deux cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  :

- $y' = y - 1$  et  $u_{n+1} = u_n - 1$
- $y'' = -y' + y$  et  $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ .

**Ex. 8.22** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Calculer } S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \text{ et } T_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^i \binom{j}{i}.$$

En déduire la valeur de  $\sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ i \text{ pair}}} \binom{j}{i}$  et  $\sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ i \text{ impair}}} \binom{j}{i}$ .

### Ex. 8.23 \*

En remarquant que  $\forall x \in [0; 1], x^2 \leq x$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |\cos(k)| \geq \frac{n}{4}$$

## Corrections

**Cor. 8.2** : Par définition,  $\alpha$  est un majorant de  $A$ . Donc  $A$ , non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à  $\alpha$ . Si  $\forall x \in A, x < \alpha$ , on a encore  $\sup A \leq \alpha$ . Le même raisonnement que précédemment reste valable.

Attention cependant, il est possible que  $\sup A = \alpha$ . L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si  $A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ , on a  $\forall x \in A, x < 1$ , mais  $\sup A = 1$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$ .

**Cor. 8.3** :

- $E_n$  est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si  $k \geq n + 1$ , alors  $k + \frac{n}{k} > k \geq n + 1$ . Or pour  $k = n$ , on a  $k + \frac{n}{k} = n + 1$ . Donc la borne inférieure est atteinte pour  $k \leq n$ , c'est-à-dire :

$$\inf E_n = \inf_{1 \leq k \leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right).$$

- Étudions la fonction  $f(x) = x + \frac{n}{x}$ . Elle est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Donc  $f$  passe par un minimum en  $x = \sqrt{n}$ , valeur pour laquelle  $f(x) = f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$ .

Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où  $\inf E_n = \inf_{1 \leq k \leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$  est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction  $f$  soit atteint c'est-à-dire que  $n$  soit un carré.

**Cor. 8.14** :

- Lemme :  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$ .

En effet, en définissant la fonction  $f : x \in ]-1; +\infty[ \mapsto \ln(1+x) - x$  qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :

$$\forall x \in ]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ qui est du signe de } -x.$$

Donc  $f$  est croissante sur  $] - 1; 0]$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut  $f(0) = \ln(1) = 0$  ce qui achève la démonstration du lemme.

Or  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$  (qui appartient

bien à  $] - 1; +\infty[$ ).

De même  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(\frac{p+1-1}{p+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{-1}{p+1}\right)$ .

Donc  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) \geq -\frac{1}{p+1}$  (car  $\frac{-1}{p+1} \in ] - 1; +\infty[$ ).

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ .

Or d'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ .

En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

e.

c. D'après la première question,  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \geq \sum_{p=1}^n \ln(p+1) - \ln(p) = \ln(n+1)$  (télescopage).

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$  donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty.$$