Maths - Chapitre 10

Systèmes linéaires

I. Programme officiel

Systèmes linéaires et calcul matriciel

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Systèmes linéaires a) Généralités sur les systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues.	Interprétations géométriques, représentations d'une droite ou d'un plan.
Système homogène associé à un système linéaire.	
Matrice A d'un système homogène. Matrice augmentée $(A\|B)$ d'un système avec second membre.	On introduit les matrices comme tableaux rectangulaires d'éléments de $\mathbb{K}$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, d'un systèmes.	On emploiera les notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j, \lambda \neq 0$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
Deux matrices sont dites équivalentes par ligne si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Notations $A \underset{L}{\sim} A'$.
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss	
Une matrice est dite échelonnée par ligne si elle vérifie les deux propriétés suivantes : • si une ligne est nulle, toutes les suivantes sont nulles ; • à partir de la seconde ligne, pour toute ligne non nulle, le premier coefficient non nul en partant de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente. On appelle pivot le premier coefficient non nul d'une ligne non nulle.	

Une matrice échelonnée en ligne est dite échelonnée ***réduite*** si elle est nulle ou si ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne. Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.	La démonstration de l'unicité n'est pas exigible.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres. Système incompatible. Système compatible. Rang d'un système linéaire. Le nombre de paramètres est égal à la différence entre le nombre d'inconnues et le rang. Expression des solutions d'un système.	

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont deux entiers naturels non nuls.
On appelle ***scalaire*** tout élément de $\mathbb{K}$.

II. Introduction

Ex. 10.1 Résoudre les systèmes suivants :

Inconnue $(x;y)\in\mathbb{R}^2$
$$S_1:\begin{cases} 6x & +2y = & 1\\ x & -2y = & 3\end{cases}$$

Inconnue $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$
$$S_2:\begin{cases} x+y+ & z & =-5\\ x-y+ & 2z & =0\end{cases}$$

Inconnue $(x;y)\in\mathbb{C}^2$
$$S_3:\begin{cases} (1+i)x & + & (2-i)y & = & 3-2i\\ (-1+i)x & + & (1+2i)y & = & 2+3i\end{cases}$$

II.1. Formules de Cramer en dimension 2

Proposition 10.1

Soient $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{K}$ vérifiant $|a|^2+|a'|^2\neq 0$ et $|b|^2+|b'|^2\neq 0$. Le système d'inconnue $(x;y)\in\mathbb{K}^2$
$$S:\begin{cases} ax & + & by & = & c\\ a'x & + & b'y & = & c'\end{cases}$$

- possède, si $\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix} = ab'-a'b\neq 0$, un unique couple solution donné par

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}} \quad\text{et}\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}$$

- possède une infinité de solutions si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$;
- ne possède aucune solution si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \neq \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

Démonstration

Définition 10.2

Le nombre (réel ou complexe) $ab'-a'b$ est appelé ***déterminant du système*** et noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

II.2. Interprétation géométrique dans le plan

Dans le plan rapporté à un repère, chaque équation du système correspond à une droite. Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est donc chercher les points d'intersection de deux droites.
Plus précisément :

- Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, les deux droites sont sécantes et l'unique couple solution correspond à leur point d'intersection $M\left(\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}; \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)$.
- Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$, les deux droites sont confondues et les solutions sont les coordonnées des points de cette droite : elles vérifient l'une des deux équations du système.
  Le paramétrage de ces points obtenu dans la précédente démonstration s'écrit pour $k \in \mathbb{K}$ $\left(\dfrac{c'-b'k}{a'}; k\right) = \left(\dfrac{c'}{a'}; 0\right) + k\left(\dfrac{-b'}{a'}; 1\right)$.
  Donc cette droite passe par le point $N\left(\dfrac{c'}{a'}; 0\right)$ et est dirigée par $\vec{u}\,(-b'; a')$.
- Enfin, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \neq \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, les deux droites sont strictement parallèles et n'ont pas d'intersection.

Ex. 10.2 Résoudre suivant la valeur du paramètre $u \in \mathbb{R}$ le système

$$S : \begin{cases} (2u-1)x & + & (u+1)y & = & 2u+2 \\ (u-1)x & + & (u+1)y & = & u+1 \end{cases}$$

Cor. 10.2

II.3. Définitions

Définition 10.3 (Équations et systèmes linéaires)

On appelle ***équation linéaire à*** p ***inconnues*** toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p = b$$

où $a_1, a_2, ..., a_p, b$ sont des ***constantes scalaires*** (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ donnés) et $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les inconnues.

Lorsqu'on connaît des valeurs de $x_1, x_2, ..., x_p$ satisfaisant l'équation, on dit que ces valeurs $v_1, v_2, ..., v_p \in \mathbb{K}$ sont ***solutions de l'équation*** ou encore que $(v_1, v_2, ..., v_p) \in \mathbb{K}^p$ est ***un*** p***-uplet solution de l'équation***.

On appelle système linéaire de n ***équations à*** p ***inconnues*** tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{i\in[\![1;n]\!],j\in[\![1;p]\!]}$ est une ***matrice*** (c'est-à-dire un tableau) ***de constantes scalaires à*** n ***lignes et*** p ***colonnes***, $(b_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est un ***vecteur-colonne de*** $\mathbb{K}^n$ et $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les inconnues.

À nouveau, des valeurs $v_1, v_2, ..., v_p \in \mathbb{K}$ des inconnues satisfaisant le système - c'est-à-dire satisfaisant ***chacune des équations du système*** - sont appelées ***solutions du système***. On dit aussi que $(v_1, v_2, ..., v_p) \in \mathbb{K}^p$ est ***un*** p***-uplet solution du système***.

Notation

L'ensemble des matrices de coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des vecteurs-colonne est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^n$.

Définition 10.4 (Matrice et matrice augmentée d'un système)

Avec les notations de la définition 10.3, la matrice $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1;n]\!],j\in[\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée ***matrice du système linéaire***.

La matrice de $\mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ formée des p colonnes de A auxquelles on juxtapose le vecteur-colonne B est appelée ***matrice augmentée du système***.

Notation

La matrice augmentée du système est notée $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$.

On dit qu'on a ***bordé la matrice*** A ***par le vecteur colonne*** B.

Ex. 10.3 Donner les matrices et matrices augmentées des systèmes vus à l'exercice 10.1 .

Cor. 10.3

Définition 10.5 (Système homogène et second membre)

Étant donné un système linéaire $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$ à n équations et p inconnues, on appelle ***second membre*** le vecteur-colonne $B = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in \mathbb{K}^n$ et ***système homogène associé*** le système obtenu en annulant le second membre, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Remarque

Un système homogène possède au moins une solution, le vecteur nul de $\mathbb{K}^p$.

II.4. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Notation

Étant donné un système de n équations à p inconnues, pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$, on note

- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{K}$, l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j$.

Définition 10.6 (Opérations élémentaires)

Les opérations correspondant aux deux notations données ci-dessus sont appelées ***opérations élémentaires sur les lignes*** d'un système linéaire.

Remarque

On ***retiendra*** les remarques suivantes :

- dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, ***il est absolument nécessaire que*** $\lambda \neq 0$;
- deux cas fréquents de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ sont :
  - ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ où $\lambda = 1 \neq 0$;
  - ⋆ $L_i \leftarrow \lambda L_i$ où $\lambda \neq 0, \mu = 0$.
- à priori, ***on ne peut effectuer qu'une seule opération élémentaire à la fois*** !

Définition 10.7 (Systèmes équivalents)

Deux systèmes linéaires sont dits ***équivalents*** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une ***famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes***.

III. Méthode du pivot de Gauss

III.1. Ensemble des solutions de deux systèmes équivalents

Théorème 10.8

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence et repose essentiellement sur la remarque suivante.

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont des bijections de l'ensemble des systèmes de n équations à p inconnues vers lui-même.

- la bijection réciproque de $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_i \leftrightarrow L_j$;
- la bijection réciproque de $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ est $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i - \frac{\mu}{\lambda} L_j$ ***à condition que*** $\lambda \neq 0$!

  Ceci justifie que dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, on n'autorise que les valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

III.2. Présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire

Définition 10.9 (Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)

On définit les ***opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice*** de la même manière que pour les systèmes. Autrement dit, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$,

- $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j de A ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*, \mu \in \mathbb{K}$ est l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***de*** A ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j, \lambda \neq 0$.

Définition 10.10 (Matrices équivalentes par lignes)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par lignes*** si elles se déduisent l'une de l'autre par une famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Notation

Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par ligne, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Méthode

Comme nous le verrons, la méthode du Pivot de Gauss consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes d'un système pour obtenir de proche en proche (c'est-à-dire par ***récurrence*** ou de façon ***récursive***) l'ensemble des solutions du système.
Or ***effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système revient à effectuer les mêmes opérations sur la matrice augmentée du système***.
Par soucis d'efficacité, on présentera donc souvent la résolution d'un système sous ***forme matricielle*** en écrivant ***une suite de matrices augmentées équivalentes par lignes***.

Ex. 10.4 Résoudre le système d'inconnues $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ suivant en présentant la résolution sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & -1 \\ x & + & 16y & + & 81z & + & 256t & = & -5 \end{array}\right.$$

Cor. 10.4

III.3. Matrices échelonnées

Définition 10.11 (Matrice échelonnée par lignes)

Une matrice est dite ***échelonnée par lignes*** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non

nul à partir de la gauche est situé (***strictement***) à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Définition 10.12 (Pivot d'une matrice échelonnée par lignes)

On appelle ***pivot*** d'une matrice échelonnée par lignes le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Schématiquement, une matrice échelonnée par lignes possède des coefficients nuls « sous un escalier ». Voici un exemple de matrice échelonnée par lignes :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ désignent des coefficients quelconques

et les $\oplus$ les pivots (***non nuls***) de chaque ligne non nulle.

(source : http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrice_échelonnée)

Proposition 10.13 (Algorithme d'échelonnement)

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

Démonstration

On le démontre par récurrence sur le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de ligne(s).

***Initialisation** :*

Une matrice possédant une seule ligne est évidemment échelonnée par lignes, donc équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

***Hérédité** :*

Supposons que toute matrice possédant $n \in \mathbb{N}^*$ ligne(s) soit équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

Soit M une matrice à $n+1$ lignes.

- *Ou bien M est la matrice nulle auquel cas elle est échelonnée par lignes.*
- *Ou bien il existe un coefficient de M non nul.*
  L'ensemble $C = \{j \in [\![1;p]\!], \exists i \in [\![1;n+1]\!], m_{i,j} \neq 0\} \subset \mathbb{N}^*$ est alors non vide, donc $j_0 = \min C$ existe et il existe $i_0 \in [\![1;n+1]\!]$ tel que $m_{i_0,j_0} \neq 0$.
  En utilisant l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$, on a $M \underset{L}{\sim} M'$ où le premier coefficient non nul de la première ligne de M' est m_{1,j_0} (car $j_0 = \min C$).
  En utilisant les opérations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{m_{k,j_0}}{m_{1,j_0}} L_1$ pour $k \in [\![2;n+1]\!]$, on a $M \underset{L}{\sim} M' \underset{L}{\sim} M''$ où les $j_0 - 1$ premières colonnes de M'' sont nulles, et où le seul coefficient non nul de la colonne d'indice j_0 est m_{1,j_0}. On distingue à nouveau deux cas :
  - $\star$ *Si $j_0 = p$ alors M'' est échelonnée par lignes et l'hérédité démontrée.*
  - $\star$ *Sinon, notons N la sous-matrice de M'' constituée des lignes dont l'indice est dans*

$[\![2;n+1]\!]$. N est une matrice à n lignes, elle est donc équivalente par lignes à une matrice échelonnée (par hypothèse de récurrence).
Autrement dit, il existe une famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes de N conduisant à une matrice échelonnée par lignes. En opérant la même famille d'opérations élémentaires sur les lignes correspondantes de M'' (d'indices de ligne supérieur de 1 à ceux des opérations élémentaires effectuées sur N), on obtient une matrice M''' échelonnée par lignes et telle que $M \underset{L}{\sim} M'''$ puisque
d'une part ces opérations laissent inchangée la première ligne de M'',
d'autre part les j_0 premières colonnes de M'' sont nulles à l'exception du pivot m_{1,j_0},
*et qu'enfin le premier coefficient non nul de la deuxième ligne est situé, **s'il existe**, à droite du premier coefficient non nul de la première ligne.*

***Conclusion** : la propriété est initialisée au rang $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

III.4. Matrices échelonnées réduites

Définition 10.14 (Matrice échelonnée réduite par lignes)

Une matrice est dite ***échelonnée réduite (par lignes)***
si elle est nulle
ou
si elle est échelonnée par lignes et que tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite : les $*$ désignent des coefficients quelconques.
(source : http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrice_échelonnée)

Proposition 10.15 (Algorithme du pivot de Gauss)

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Démonstration

***Existence** : on la démontre par récurrence. On suppose la propriété vérifiée pour les matrices de n lignes.*
On part de la matrice échelonnée $Q = M'''$ obtenue dans la démonstration de la proposition 10.13 et on divise chaque ligne non nulle par son pivot (non nul) pour obtenir une matrice Q'.
Ou bien la deuxième ligne de Q' est nulle ou n'existe pas auquel cas Q' est échelonnée réduite puisque la matrice possède au plus un pivot égal à 1 sur la première ligne.

Ou bien la deuxième ligne est non nulle . La sous-matrice composée des n *dernières lignes de* Q' *vérifie la propriété de récurrence ce qui permet d'obtenir une matrice* Q''. *Pour chaque pivot de* Q'' *des lignes d'indice supérieur à 2, on fait une opération élémentaire du type* $L_1 \leftarrow L_1 - aL_i$ *où* a *est choisi de sorte à annuler le coefficient de la première ligne de même colonne que le pivot de la* $i^{\text{ème}}$ *ligne.*
La matrice obtenue est échelonnée réduite.
Unicité : démonstration explicitement hors-programme.

IV. Résolution pratique des systèmes linéaires

IV.1. Principe général

Soit S un système de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues, de matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de matrice augmentée $(A|B) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$.
On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée de S ce qui conduit à $(A|B) \underset{L}{\sim} (A'|B')$ où $(A'|B') \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ est, d'après le théorème 10.8 et la proposition 10.15 :

- l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à $(A|B)$;
- la matrice augmentée d'un système S' équivalent à S et possédant donc le même ensemble de solutions.

Résoudre un système quelconque S ***revient donc :***

1) ***à effectuer l'algorithme du pivot de Gauss sur sa matrice augmentée ;***
2) ***à savoir résoudre les systèmes dont la matrice augmentée est échelonnée réduite par lignes.***

Dans tout ce qui suit, S, S', $(A|B)$ et $(A'|B')$ désignent les objets que nous venons de définir.

IV.2. Inconnues et paramètres

Définition 10.16 (Inconnues principales, inconnues secondaires)

On appelle ***inconnue principale*** d'un système S toute inconnue possédant un pivot sur sa colonne dans la matrice A' échelonnée réduite obtenue après application du pivot de Gauss.
Dans le cas contraire, on dit que l'inconnue est une ***inconnue secondaire*** ou un ***paramètre du système*** S.

IV.3. Systèmes compatibles, systèmes incompatibles

Définition 10.17 (Systèmes compatibles, systèmes incompatibles)

On dit qu'un système est ***compatible*** si la matrice $(A'|B')$ échelonnée réduite obtenue après application du pivot de Gauss ne possède pas de pivot dans sa dernière colonne.
Sinon, on dit que le système est ***incompatible***.

Proposition 10.18

Un système incompatible ne possède aucune solution.

Démonstration

Supposons que S soit incompatible : il possède le même ensemble de solutions que S' de matrice augmentée (échelonnée réduite) $(A'|B')$. Or cette matrice possède un pivot dans la dernière colonne donc il existe une ligne $i \in [\![1;n]\!]$ du système s'écrivant $0 = b'_i \neq 0$ qui n'a aucune solution quelles que soient les valeurs des inconnues.

IV.4. Résolution générale d'un système compatible

Définition 10.19 (Rang d'un système)

On appelle rang d'un système le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite A' associée à sa matrice A.

Notation

On note $\operatorname{rg} S$ le rang d'un système S.

Remarque

Les inconnues principales étant celles possédant un pivot sur la colonne qui leur est associée dans la réduite échelonnée A' du système, il y a autant d'inconnues principales que de pivots : le nombre d'inconnues principales vaut $\operatorname{rg} S$.
De ce fait, $p - \operatorname{rg} S$ est le nombre d'inconnues secondaires.

Corollaire 10.20

Le rang d'un système de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à $p \in \mathbb{N}^*$ est inférieur ou égal à $\min(n;p)$.

Théorème 10.21

Un système compatible possède au moins une solution.

Démonstration

Supposons que S soit compatible : il possède le même ensemble de solutions que S' de matrice augmentée (échelonnée réduite) $(A'|B')$ où aucun pivot ne se trouve dans le second membre.
La matrice $(A'|B')$ se termine éventuellement par des lignes nulles que l'on peut supprimer puisqu'elles correspondent dans le système S' à des lignes $0 = 0$ qui sont vérifiées pour toutes valeurs des inconnues. On se ramène donc à un système de $N \in \mathbb{N}$ équations.
Si $N = 0$, tout couple est solution et l'ensemble des solutions est donc $\mathbb{K}^p$.
Sinon, en réordonnant les inconnues principales et secondaires (ce qui revient à échanger des

colonnes de la matrice augmentée $(A'|B')$*, on obtient donc un système* S'' *de matrice augmentée*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & b'_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & b'_N \end{pmatrix}$$

où $N = \operatorname{rg} S \leqslant p$ *par construction et où les* $*$ *désignent les coefficients affectant les paramètres du système.*

Le système a donc au moins une solution $\left(b'_1; b'_2; ...; b'_N; \underbrace{0; 0; ...; 0}_{p-N \text{ zéros}}\right)$.

IV.5. Exercices

Méthode : Résolution générale d'un système de n équations à p inconnues

On part d'un système S de n équations à p inconnues.

1) On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée $(A|B)$ de S ce qui permet d'obtenir l'unique réduite échelonnée par lignes $(A'|B') \underset{L}{\sim} (A|B)$.
2) S'il y a un pivot sur la dernière colonne, le système est incompatible et n'a aucune solution.
3) Sinon, si toutes les lignes sont nulles, l'ensemble des solutions du système est $\mathbb{K}^p$.
4) Sinon, on supprime les lignes nulles et on échange inconnues principales et inconnues secondaires de sorte à obtenir une matrice échelonnée réduite de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & b'_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & b'_N \end{pmatrix}$$

   où $N = \operatorname{rg} S \leqslant p$ par construction et où les $*$ désignent les coefficients affectant les paramètres du système.
5) Les inconnues secondaires peuvent être choisies quelconques : s'il y en a, le système a une infinité de solutions.
   Les inconnues principales sont quant à elles déterminées de façon unique en fonction des valeurs données aux inconnues secondaires.

Ex. 10.5 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions de :

$S_1 : \begin{cases} 3x - y + 2z &= 5 \\ -8x + 3y + z &= 1 \end{cases}$ $S_2 : \begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= 3 \end{cases}$ $S_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x &= \frac{-1}{5} \end{cases}$

Ex. 10.6 Résoudre pour $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et donner une interprétation géométrique du résultat :

$S_1 : \begin{cases} x + y + z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x + 4y + 9z &= 2 \end{cases}$ $S_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z &= a \\ y + 2z &= b \\ z &= c \end{cases}$

$S_3 : \begin{cases} x + y + z &= 5 \\ x - 2y + 4z &= 6 \\ x + 7y - 5z &= 2 \end{cases}$ $S_4 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y &= \frac{-1}{5} \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2\sqrt{3}(x-y-z)}{3} &= 1 \end{cases}$

Ex. 10.7 Résoudre le système

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 2x + 4y + 8z + 8t = 4 \\ 3x + 6y + 11z + 14t = 3 \\ 4x + 8y + 18z + 14t = 8 \end{cases}$$

sachant que sa réduite échelonnée par lignes est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.8 Résoudre le système

$$S : \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ 3x + 2y + t = 2 \\ x + 3y + 2z + t = 3 \\ 2x + 3y + 4t = 3 \end{cases}$$

sachant que sa réduite échelonnée par lignes est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.9 Soient a, b, c les racines de $t^3 - t + 1 = 0$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

Ex. 10.10

1) Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + ay + z = \beta \\ x + y + az = \gamma \end{cases}$$

2) Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 10.11 Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}^*$ et $s \in \mathbb{K}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} & = & \dfrac{x_2}{a_2} & = & \cdots & = & \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & s \end{array}\right.$$

Ex. 10.12 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $x_j = ax_{j-1} + b$ et $x_1 = ax_n + b$.