Informatique - TP 7

Base 2 et dichotomie

1. Étant donné un entier $n \geqslant 0$, on donne ses ***chiffres en base 2*** sous la forme d'une ***liste*** de 0 et de 1, où le chiffre le plus à droite est celui des unités, puis à gauche de lui, le chiffre des deuxaines, etc...
   Par exemple la liste `[1,0,0,1,1]` représente l'entier $16+2+1=19$.
   Écrire une fonction `decimal(L)` qui prend pour paramètre ***une liste*** `L` ***de*** 0 ***et de*** 1 et renvoie l'entier correspondant.
2. Tester votre fonction pour `[1,0,0,1,1]` puis pour `[1,0,1,0,0]`.
   Vérifier à la main que le résultat est correct dans les deux cas.
3. Trouver ***à la main*** la décomposition en base 2 de l'entier 107.
4. Écrire une fonction `binaire(n)` qui prend pour paramètre un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la liste de ses chiffres en base 2.
   Remarques :
   - la fonction vérifiera que l'entier est bien positif, et renverra `None` s'il est négatif ;
   - la fonction `bin` est interdite pour cette question.
5. ***Méthode par dichotomie*** : La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction f continue sur $[a;b]$ vérifiant $f(a)f(b)<0$ fait intervenir deux suites adjacentes dont la limite commune c vérifie $c \in]a;b[$, $f(c)=0$.
   La définition de ces deux suites donne naissance à un algorithme de résolution numérique d'équations appelé ***méthode de dichotomie***.
   Le principe de cette méthode est le suivant :
   - on se donne une fonction f supposée continue sur $[a;b]$ et vérifiant $f(a)f(b) \leqslant 0$. On cherche $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c)=0$.
     En pratique, on se donne $\epsilon > 0$***, et on cherche une valeur approchée de*** c ***à*** ϵ ***près***.
   - ***Initialisation*** : on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et on a $f(a_0)f(b_0) \leqslant 0$;
   - ***Traitement*** : on calcule $y = f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$.
     Si $f(a) \times y > 0$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}; b_{n+1} = b_n$.
     Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n; b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.
   - ***Terminaison*** : lorsque $|a_n - b_n| \leqslant \epsilon$, on arrête l'algorithme et on renvoie la valeur $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ comme valeur approchée de c.

   a) Écrire une fonction `dicho(f,a,b,epsilon)` qui vérifie que $f(a)f(b) \leqslant 0$ et $epsilon > 0$ puis utilise l'algorithme décrit plus haut pour renvoyer une valeur approchée à `epsilon` près d'une solution de $f(x)=0$.

   b) Tester votre fonction pour $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 - 2$, $a=1$, $b=2$, $epsilon = 10^{-7}$.

   c) Comparer le résultat de la question précédente et la valeur de $\sqrt{2}$.

   d) Obtenir (à l'aide de la fonction `dicho`) des valeurs approchées à 10^{-15} près de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{1000}$, $\sqrt{10001}$.
   Commentaire ?