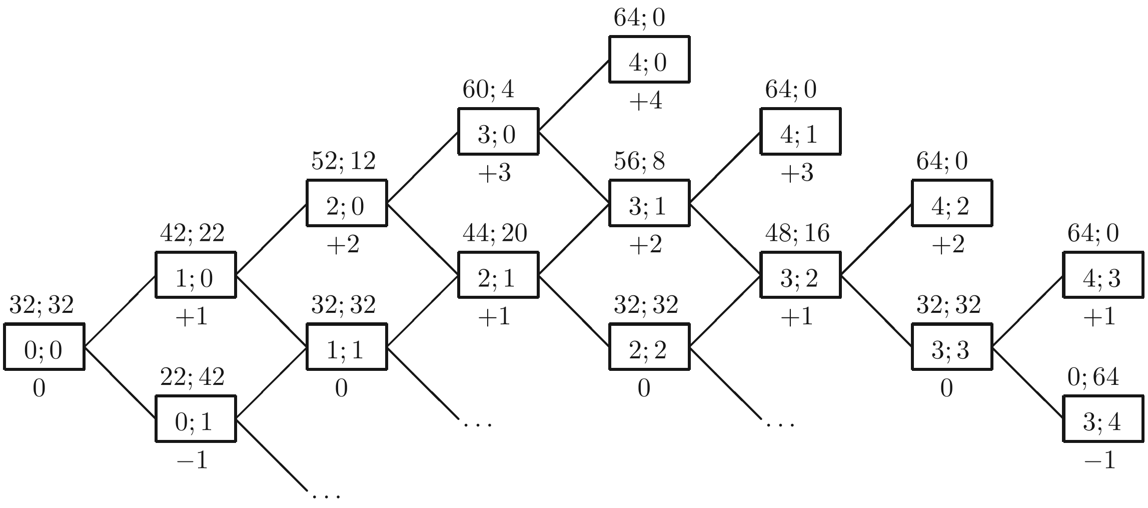
II. Correction des exercices sur la correspondance Fermat-Pascal



Légende :

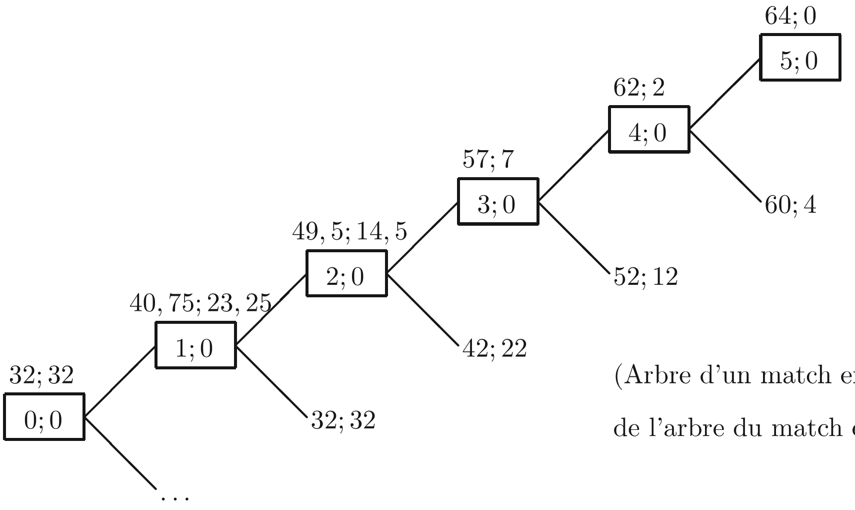
Partis ou ***répartition des gains***

Score

Avantage

L'arbre ci-dessus représente tous les scores possibles lors d'un match en 4 manches gagnantes (la partie inférieure de l'arbre qui est manquante est l'exacte symétrique de la partie supérieure). La répartition des gains en cas d'arrêt prématuré de la partie a été calculée selon la méthode indiquée par Pascal.
Si le score en arrive à $1; 1$, il suffit pour qu'un joueur gagne la partie qu'il gagne 3 manches. Autrement dit, à $1; 1$, le reste de la partie se joue en 3 manches gagnantes.
De même, à $2; 2$, le reste de la partie se joue en 2 manches gagnantes. Et à $3; 3$, le reste de la partie se joue en 1 manche gagnante, c'est-à-dire que celui des deux qui gagne la manche suivante a gagné la partie.
Ceci nous permet d'affirmer que l'arbre de la répartition des gains pour un match en 1 manche gagnante se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 2 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 3 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 4 manches gagnantes etc...

Pour construire l'arbre de la répartition des gains pour un match en 5 manches gagnantes, il suffit donc de construire les bords de l'arbre ci-dessus, et comme l'arbre est symétrique, de construire le bord supérieur.



(Arbre d'un match en 4 manches gagnantes à l'intérieur de l'arbre du match en 5 manches gagnantes.)

Finalement, au sens où l'entend Pascal et pour une mise de 32 pistoles par joueur :

- la première manche d'un match en 1 manche gagnante vaut 32 pistoles ;
- la première manche d'un match en 2 manches gagnantes vaut 16 pistoles ;
- la première manche d'un match en 3 manches gagnantes vaut 12 pistoles ;
- la première manche d'un match en 4 manches gagnantes vaut 10 pistoles ;
- la première manche d'un match en 5 manches gagnantes vaut 8,75 pistoles.

D'une manière générale, pour un match en n manches gagnantes, Pascal propose la formule suivante pour le calcul de la valeur de la première manche lorsque chaque joueur a fait une mise de M :

la première manche d'un match en n ***manches gagnantes vaut*** $M \times \dfrac{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres impairs}}{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres pairs}}$

Ce qui appliqué aux cas déjà calculés, donne :

- 2 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{M}{2}$
- 3 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4} = \dfrac{3M}{8}$
- 4 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{5M}{16}$
- 5 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{35M}{128}$

Généralisation :

1. donner une formule explicite pour la valeur de la première manche d'un match en n manches gagnantes à l'aide de factorielles et de puissances de 2 ;
2. combien vaut la $k^{\text{ième}}$ manche d'un match en n manches gagnantes ?