Maths - TD n° 2

# Suites récurrentes

Dans tout le TD, on dénotera par :

- $I$ un intervalle réel ;
- $f$ une fonction de $\mathcal{F}(I, I)$ ;
  (autrement dit $f$ est définie sur $I$ et $f(I) \subset I$ : on dit que $I$ ***est stable par*** $f$)
- $a$ un élément de $I$.

On définit alors la suite $u$ par $\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$.

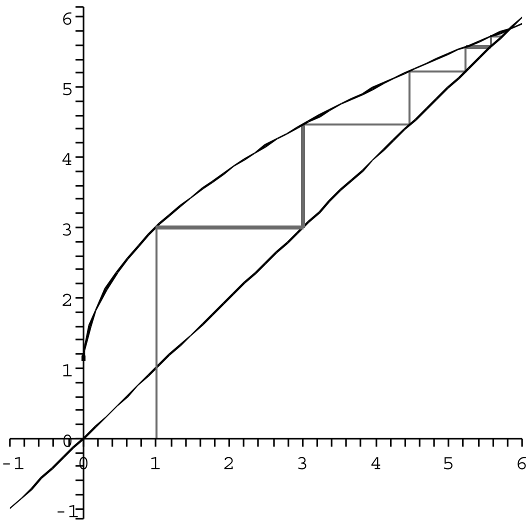
On étudiera aussi les suites $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} w_0 & = & \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & g(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{cases}$.

## .1. Existence et représentation graphique d'une suite récurrente

**Ex.** 2.1

1. Démontrer que $u$ est bien définie.

   Ci-contre la représentation graphique de la suite $v$.
   Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
   On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse $v_0$ de la représentation graphique de $r$.
   Pour placer $v_1$ en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée $v_1$ de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
   On peut alors recommencer le même processus pour représenter $v_2$, $v_3$ etc...




2. Prouver l'existence de la suite $v$ (c'est-à-dire montrer qu'elle est bien définie).
3. Prouver l'existence de la suite $w$ puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé en prenant 2`cm` pour unité.

## .2. Monotonie

**Ex.** 2.2

1. Montrer que si $f$ est strictement croissante sur $I$ et si $u_1 > u_0$ alors $u$ est strictement croissante.
2. Montrer que si $f$ est croissante sur $I$ alors $u$ est monotone.
3. Que peut-on dire si $f$ est décroissante sur $I$ ?
4. Que peut-on dire du sens de variation des suites $v$ et $w$ précédemment définies.

## .3. Théorème du point fixe et convergence

On dit que $\alpha \in I$ est un point fixe de $f$ si $\alpha = f(\alpha)$.

**Ex.** 2.3 On suppose $f$ ***continue*** sur $I$.

1. Montrer que si $I$ est un segment (i.e. $I$ de la forme $[b;c], b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$) alors $f$ possède au moins un point fixe sur $I$.
2. Montrer que si $I$ est un segment et si $f$ est croissante sur $I$ alors $u$ converge vers un point fixe de $f$ sur $I$.
3. Donner un exemple d'une fonction $f(: I \to I)$ telle que $u$ diverge :
   - avec $f$ croissante et $I = [0; +\infty[$ ;
   - avec $f$ décroissante et $I = [0; 1]$.
4. Donner un exemple d'une fonction $f : [0; 1] \to [0; 1]$ décroissante telle que $u$ converge.

## .4. Exemples d'utilisation

**Ex.** 2.4 Étudier la convergence des suites $v$ et $w$ définies dans l'exercice 2.1.

**Ex.** 2.5 (Cor.) On définit la suite $t$ par $\begin{cases} t_0 & \in & \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = & h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{cases}$

1. Montrer que $t$ est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de $h$ et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que $t$ est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de $t$ lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

**Ex.** 2.6 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite $s$ définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0; 1]) = [0; 1]$, représenter graphiquement $k$ et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite $s$ pour parvenir à une conclusion.]

**Ex.** 2.7 (Cor.) [**] $f$ désigne une application continue et strictement croissante, du segment $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie : $f(0) = 0$ et $\forall x \in ]0, a], f(x) < x$.
On suppose, en outre, que l'on a au voisinage de 0, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
On considère des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $a_1 \in ]0, a]$ et $b_1 \in ]0, a]$ et, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$.
Montrer que l'on a $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$.

**Ex.** 2.8 (Cor.) [**] Soit $a \in [0; 1]$ et $u$ définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.
Remarque : on pourra éventuellement traiter les deux questions en même temps.

1. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles la suite est convergente.
2. Déterminer lorsqu'elle converge un équivalent de $u_n - l$.