Formulaire de trigonométrie (à connaître !)

Les **courbes** représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente sont à connaître.

Ensembles de définition et dérivées

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

2. cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout entier naturel n et tout réel t:
   $\cos^{(n)}(t) = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin^{(n)}(t) = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right).$

3. tan est définie sur $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k}$ où $I_k = \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

   ~~cotan est définie sur $\boxed{D' = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I'_k}$ où $I'_k = \left]k\pi, \pi + k\pi\right[$.~~ ***Hors-programme.***

   tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et $\quad \forall t \in D, \quad \tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$.

   ~~cotan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D' et $\forall t \in D', \quad \text{cotan}'(t) = -1 - \text{cotan}^2(t) = \frac{-1}{\sin^2(t)}$.~~ ***Hors-programme.***

Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$

Formules d'addition

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ (sous réserve que chaque terme existe).

Pour tout réel t et tout entier naturel n :
$\cos(nt) = \mathcal{R}e\Big[\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)^n\Big] \qquad \sin(nt) = \mathcal{I}m\Big[\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)^n\Big]$

Formules de duplication

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$
$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

Angle moitié

$\cos(t) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \sin(t) = \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \tan(t) = \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$
(sous réserve que chaque terme existe)

Période, antipériode

cos et sin sont 2π-périodiques, tan est π-périodique.

$\sin(t+\pi) = -\sin(t) \qquad \cos(t+\pi) = -\cos(t) \qquad \tan(t+\pi) = \tan(t)$
Pour tout réel t et tout entier relatif p :
$\sin(t+p\pi) = (-1)^p\sin(t) \qquad \cos(t+p\pi) = (-1)^p\cos(t)$

Arcs associés

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos(t)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin(t)$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{1}{\tan(t)}$ $\quad (t\in\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos(t)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin(t)$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\frac{-1}{\tan(t)}$ $\quad (t\in\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$

$\sin\left(\pi-t\right)=\sin(t)$ $\quad$ $\cos\left(\pi-t\right)=-\cos(t)$ $\quad$ $\tan\left(\pi-t\right)=-\tan(t)$ $\quad (t\in D)$

Formules de linéarisation (transformation de produits en sommes)

$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

$\sin^2(t)=\frac{1-\cos(2t)}{2}$ $\qquad$ $\cos^2(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2}$

Transformations de sommes en produits

$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\quad$ $\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\quad$ $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Équations trigonométriques

- étant donné un réel α, l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x)=\sin(\alpha)$
  (d'inconnue x) est $S=\{\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$
- étant donné un réel α, l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x)=\cos(\alpha)$
  (d'inconnue x) est $S=\{\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$
- étant donné un réel $\alpha\in D$, l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x)=\tan(\alpha)$
  (d'inconnue x) est $S=\{\alpha+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$
- étant donné un réel $\alpha\in D'$, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{cotan}(x)=\mathrm{cotan}(\alpha)$
  (d'inconnue x) est $S=\{\alpha+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$